1.4 Matriz inversa

OBJETIVOS

- Calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada por operaciones elementales.
- Calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada por el método de cofactores.
- Resolver un sistema de ecuaciones por el método de la matriz inversa

Matriz inversa

Si A es una matriz cuadrada, la matriz inversa de A, representada como A^{-1}, es aquella matriz que al multiplicarla por A da como resultado la matriz identidad I, es decir

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa, si la matriz A tiene inversa se dice que A es invertible. Si la matriz inversa de A no existe se dice que A no es invertible.

por ejemplo las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ son inversas una de la otra ya que al efectuar sus productos se tiene

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Cálculo de la matriz inversa por operaciones elementales

Para calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada A de $n \times n$, siga el procedimiento siguiente

Escriba la matriz aumentada de $[A \quad I]$, de orden $n \times 2n$, en donde I es la matriz identidad de orden $n \times n$.

Efectúe operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada reducida.

Si la matriz escalonada reducida tiene la forma $[I \quad B]$, entonces B es la matriz inversa. si la matriz resultante del lado izquierdo no es la matriz identidad $n \times n$ entonces B no es la matriz inversa y la matriz A no es invertible.

Cálculo de la matriz inversa por cofactores

Matriz adjunta

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y sean A_{ij} todos los cofactores de la matriz A. Entonces la matriz adjunta de A es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores, es decir

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Si la matriz A es invertible entonces $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$$

Ejemplo 1: Calculo de matriz inversa de 2 por 2

Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre la matriz inversa por el método de operaciones elementales.

b. Encuentre la matriz inversa por el método de cofactores.

Solución

a. Construyendo la matriz $[A \quad I]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada reducida

$F1 \times (-2) + F2 \rightarrow F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$F2 \div (11) \rightarrow F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$F2 \times (-3) + F1 \rightarrow F1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Como la matriz escalonada reducida tiene la forma $[I \quad B]$, se concluye que la matriz A es invertible y su matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{11} & \dfrac{3}{11} \\ -\dfrac{2}{11} & \dfrac{1}{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Para encontrar la matriz inversa por el método de cofactores, primero se calcula el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (-3)(2) = 5 + 6 = 11$$

Como el determinante es diferente de cero, la matriz A es invertible.

Calculando los 4 cofactores de la matriz A

$$c_{11} = +5$$

$$c_{12} = -2$$

$$c_{21} = -(-3) = 3$$

$$c_{22} = +1$$

La matriz adjunta es

$$\text{adjA}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede calcular la matriz inversa

$$\text{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adjA} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Cálculo de matriz inversa de 3 por 3

Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre la matriz inversa por el método de operaciones elementales.

b. Encuentre la matriz inversa por el método de cofactores.

Solución

a. Construyendo la matriz $[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Efectuando operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada reducida

$$F1 \times (-1) + F2 \rightarrow F2$$

$$F1 \times (-2) + F3 \rightarrow F3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$F2 \times (-1) + F1 \rightarrow F1$$

$$F2 \times (-1) + F3 \rightarrow F3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$F3 \times (5) + F1 \rightarrow F1$$

$$F3 \times (-2) + F2 \rightarrow F2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como la matriz anterior tiene la forma $\left[I \quad A^{-1}\right]$, se concluye que la matriz inversa, de la matriz A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Para encontrar la matriz inversa por el método de cofactores, primero se calcula el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (1)[-6+3] - (1)[-3+2] + (-3)[3-4]$$

$$= (1)(-3) - (1)(-1) + (-3)(-1)$$

$$= -3 + 1 + 3$$

$$= 1$$

Como el determinante es diferente de cero, la matriz A es invertible.

Calculando los 9 cofactores de la matriz A

$$c_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = +(-6+3) = -3$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+2) = -(-1) = 1$$

$$c_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(3-4) = -1$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+9) - 6$$

$$c_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = +(-3+6) = 3$$

$$c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1$$

$$c_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-1+6) = 5$$

$$c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+3) - 2$$

$$c_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2-1) = 1$$

La matriz inversa es

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adjA} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa y sistemas de ecuaciones

El sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

puede escribirse en forma compacta como

$$AX = B$$

donde A es la matriz de coeficientes, X es la matriz de las incógnitas y B es la matriz de términos independientes. Si la Matriz A^{-1} existe se puede multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por A^{-1}

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

ya que $A^{-1}A$ es igual a I y la matriz identidad es la matriz neutra es decir que al multiplicar IX el resultado es X

Por lo tanto, si la matriz inversa existe, el sistema de ecuaciones tiene solución única dada por $A^{-1}B$

Ejemplo 3: Solución de un sistema de ecuaciones por matriz inversa

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de la matriz inversa

$$\begin{array}{ccccccccc} w & + & x & & & + & z & = & 2 \\ w & & & + & y & & & = & 0 \\ & & x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Solución

Al escribir el sistema en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes. El cálculo se realizará utilizando operaciones elementales

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Efectuando operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada reducida

$$F1 \times (-1) + F2 \to F2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F2 \div (-1) \to F2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F2 \times (-1) + F1 \to F1$

$F2 \times (-1) + F3 \to F3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F3 \leftrightarrow F4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$F3 \times (-1) + F1 \to F1$

$F3 \times (1) + F2 \to F2$

$F3 \times (-2) + F4 \to F4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$F4 \div (-2) \to F4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$F4 \times (1) + F1 \to F1$

$F4 \times (2) + F2 \to F2$

$F4 \times (-1) + F3 \to F3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Como en el lado izquierdo de la matriz se ha obtenido la matriz identidad, la matriz de lado derecho es la matriz inversa, es decir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema se obtiene multiplicando la matriz inversa por la matriz de términos independientes

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w = \left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(4) + (0)(1) = -1$$

$$x = (0)(2) + (0)(0) + (1)(4) + (-1)(1) = 3$$

$$y = \left(-\frac{1}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(\frac{1}{2}\right)(4) + (0)(1) = 1$$

$$z = \left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(4) + (1)(1) = 0$$

Es decir que la única solución del sistema es $w = -1, \quad x = 3, \quad y = 1, \quad z = 0$

Ejercicios sobre matriz inversa

En los ejercicios siguientes, calcule la matriz inversa utilizando operaciones elementales

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios siguientes calcule la matriz inversa utilizando el método de cofactores

9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios siguientes, resuelva el sistema de ecuaciones utilizando el método de la matriz inversa

13. $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x - 3y &= 2 \\ -x + 4y &= 1 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ -3x + 2y + z &= 1 \\ 4x + y - 3z &= 4 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 2x - 4z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 8 \\ 2x + y - 3z &= -14 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x - y - w - z &= 2 \\ x - y + w + z &= -3 \\ 2x + 2y - 2w - 2z &= 4 \\ x - y + w - z &= 2 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x + 4y - z + 3w &= 10 \\ 2x + 2y - 14z &= 44 \\ x + 8y + 4z - 8w &= 3 \\ 5x + 17y - 5z + 13w &= 44 \end{aligned}$

En los ejercicios siguientes determine el valor de k para que la matriz dada sea invertible

19. $A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & 1+k & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$

21. Sea $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, donde $a,b,c \neq 0$. Encuentre A^{-1} y muestre que $AA^{-1} = I$