1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección se estudian los métodos de Gauss y Gauss-Jordan para resolver sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales, con n incógnitas se define como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots + \quad \cdots + \cdots + \quad \cdots &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

En donde los números a_{ij} son los coeficientes de las variables x_j y los números b_i son los términos independientes en cada una de las ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones se puede representar como un producto de matrices en la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

En donde la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es la matriz de coeficientes, la matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Recibe el nombre de matriz de incógnitas y la matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Recibe el nombre de matriz de términos independientes. El sistema se puede representar en forma compacta como

$$AX = B$$

Ejemplo 1: Representar un sistema como producto de matrices

Represente los sistemas de ecuaciones como un producto de matrices

a.
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 3x + y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \end{aligned}$$

Solución

a. El primer sistema se representa en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b. El segundo sistema se representa como

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada

Un sistema de ecuaciones también se puede representar utilizando la matriz a aumentada del sistema, que consiste en agregar a la matriz de coeficientes una columna que contiene los términos independientes. En general la matriz aumentada está dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Matriz aumentada de un sistema

Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 3x - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Solución

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Operaciones elementales

En la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones se pueden realizar tres operaciones llamadas operaciones elementales de renglón. Estas operaciones no cambian la solución de un sistema de ecuaciones y son las siguientes

Intercambiar dos filas o renglones: $F_i \leftrightarrow F_j$

Esta operación elemantal indica que se pueden intercambiar la posición del renglón i con la posición del renglón j. En el siguiente ejemplo se cambia el primer renglón con el segundo renglón

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 4 & 6 & 18 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicar o dividir una fila por un número distinto de cero: $cF_i \rightarrow F_i$

Esta operación indica que se puede multiplicar o dividir cualquier fila por un número diferente de cero sin cambiar la solución del sistema de ecuaciones. En el siguiente ejemplo la primera fila de la matriz se divide entre 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F_1/2 \rightarrow F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Sumar un múltiplo de una fila a otra fila: $cR_i + R_j \rightarrow R_j$

Esta operación indica que al multiplicar todos los elementos de una fila por un número c y sumar los resultados con los correspondientes elementos de otra fila, la solución del sistema de ecuaciones no se altera. En el ejemplo siguiente la fila 1 se multiplica por -4 y se suma con la fila 2. Observe que la fila 1 no cambia, solo se modifica la fila 2 que es sobre el cual se efectúa la operación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-4F_1 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

Una matriz se encuentra en forma escalonada si cumple las condiciones siguientes:

i. Todas las filas, si las hay, cuyos elementos son todos cero; aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii. En cualquier fila (comenzando por la izquierda), el primer número diferente de cero debe ser 1.

iii. En cualquier fila que no contiene solo ceros, el primer 1 debe estar colocado a la derecha del primer 1 de cualquier fila superior. Al primer 1 en cada fila se le suela llamar pivote.

El siguiente ejemplo muestra una matriz escalonada por renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada reducida

Una matriz se encuentra en forma escalonada reducida si cumple las condiciones siguientes:

i. Es una matriz escalonada.

ii. Cualquier columna que contiene el primer 1 (pivote) de una fila, tiene ceros en el resto de sus elementos.

El siguiente ejemplo muestra una matriz escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los métodos estudiados en esta sección utilizan las operaciones elementales para transformar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones a una matriz que tenga la forma escalonada o la forma escalonada reducida según el método utilizado.

Método de eliminación Gaussiana

Este método utiliza la matriz escalonada para obtener la solución del sistema. Aunque se requieren menos operaciones para obtener la matriz escalonada, será necesario realizar operaciones algebraicas para despejar las incógnitas. El procedimiento en este método es el siguiente

i. Escriba la matriz aumentada del sistema.

ii. Efectúe operaciones elementales en la matriz aumentada hasta obtener la matriz escalonada.

iii. A partir de la matriz escalonada, reescriba el sistema de ecuaciones equivalente.

iv. A partir de la última ecuación despeje la última incógnita y luego use sustituciones hacia atrás para despejar las demás incógnitas.

Método de Gauss-Jordan

Este método utiliza la matriz escalonada reducida para obtener la solución del sistema. Aunque se requiere realizar más operaciones elementales para obtener la matriz escalonada reducida, no se requiere mayor trabajo adicional para obtener las incógnitas. El procedimiento en este método es el siguiente

i. Escriba la matriz aumentada del sistema.
ii. Efectúe operaciones elementales en la matriz aumentada hasta obtener la matriz escalonada reducida.
iii. A partir de la matriz escalonada reducida, reescriba el sistema de ecuaciones equivalente.
iv. Obtenga la solución del sistema de ecuaciones.

Características de las soluciones de un sistema de ecuaciones

Cuando se resuelve un sistema de m ecuaciones con n incógnitas puede ocurrir una de las tres situaciones siguientes:

El sistema tiene única solución:

Esto sucede cuando el sistema equivalente de ecuaciones que se obtiene a partir la matriz escalonada o escalonada reducida tiene n ecuaciones con n incógnitas y de la última ecuación se puede despejar el valor de la última incógnita.

Por ejemplo, si el sistema equivalente de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= -3 \\ z &= 10 \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones:

Esto sucede cuando el sistema equivalente de ecuaciones que se obtiene a partir de la matriz escalonada o escalonada reducida tiene más incógnitas que ecuaciones. En éste caso, la diferencia entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones da el número de variables independientes del sistema.

Por ejemplo, si el sistema de ecuaciones equivalente es:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

El sistema no tiene solución:

Esto sucede cuando la última fila de la matriz escalonada o escalonada reducida que no contiene solamente ceros, es equivalente a una ecuación de la forma $0x_n = 1$. En éste caso se dice que el sistema de ecuaciones es inconsistente.

Por ejemplo, si el sistema de ecuaciones equivalente es

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 1 \end{array}$$

Ejemplo 3: Solución de un sistema con única solución

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 3x + y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

a. Utilizando el método de eliminación gaussiana

b. Utilizando el método de Gauss-Jordan

Solución

a. El primer paso en cualquiera de los dos métodos es escribir la matriz aumentada del sistema, que consiste en agregar a la matriz de coeficientes una columna con los términos independientes

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a efectuar operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada

Fila 1 dividido entre 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Con el 1 de la primera fila, llamado pivote se procede a hacer las operaciones elementales para convertir en ceros los elementos por debajo del pivote.

Fila 1 por -4 mas fila 2 en fila 2

Fila 1 por -3 mas fila 3 en fila 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Ahora el primer elemento de la segunda fila debe ser 1

Fila 2 dividido entre -3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Con el pivote de la segunda fila, hay que hacer cero todos los números por debajo de él

Fila 2 por 5 mas fila 3 en fila 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para obtener la matriz escalonada se multiplica la fila 3 por -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Al escribir el sistema de ecuaciones equivalente a partir de la matriz escalonada se tiene

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Como el sistema equivalente tiene 3 ecuaciones con 3 incógnitas, tiene única solución. Al realizar sustituciones hacia atrás para despejar las incógnitas se tiene

$$z = 3$$

Despejando y

$$y + 2z = 4$$

$$y = 4 - 2z = 4 - 2(3) = -2$$

$$y = -2$$

Despejando x

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$x = 9 - 2y - 3z = 9 - 2(-2) - 3(3) = 4$$

$$x = 4$$

Por lo que el sistema tiene solución única

$$x = 4, \quad y = -2, \quad z = 3$$

b. En el método de Gauss-Jordan hay que hacer ceros los números que están por debajo y por arriba del pivote. La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a efectuar operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada

Fila 1 dividido entre 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Con el 1 de la primera fila, llamado pivote se procede a hacer las operaciones elementales para convertir en ceros los elementos por debajo del pivote.

F1 × (-4) + F2 → F2

F1 × (-3) + F3 → F3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Ahora el primer elemento de la segunda fila debe ser 1

F2 ÷ (-3) → F2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Con el pivote de la segunda fila hay que hacer ceros los números por arriba y por debajo de él

F2 × (-2) + F1 → F1

F2 × (5) + F3 → F3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Ahora hacemos que el primer número de la tercera fila sea 1

$$\mathbf{F}3 \times \mathbf{(-1)} \rightarrow \mathbf{F}3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, con el primer 1 de la tercera fila hacemos cero todos los números por encima de ese 1

$$\mathbf{F}3 \times \mathbf{(1)} + \mathbf{F}1 \rightarrow \mathbf{F}1$$

$$\mathbf{F}3 \times \mathbf{(-2)} + \mathbf{F}2 \rightarrow \mathbf{F}2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior es escalonada reducida. El sistema equivalente de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

El cual tiene solución única.

Ejemplo 4: Solución de un sistema inconsistente

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de eliminación gaussiana

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 18 \\ 4x + 5y &= 24 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$$

Solución

El primer paso en cualquiera de los dos métodos es escribir la matriz aumentada del sistema, que consiste en agregar a la matriz de coeficientes una columna con los términos independientes

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ahora se deben realizar operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada. Dividiendo la fila 1 entre 2 para hacer 1 el primer número de la fila 1

$$\mathbf{F}1 \div \mathbf{(2)} \rightarrow \mathbf{F}1$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Con el 1 de la primera fila, llamado pivote se procede a hacer las operaciones elementales para convertir en ceros los elementos por debajo del pivote.

F1 × (-4) + F2 → F2

F1 × (-3) + F3 → F3

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & -5 & -23 \end{array}\right]$$

Ahora el primer elemento de la segunda fila debe ser 1

F2 ÷ (-3) → F2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -23 \end{array}\right]$$

Con el pivote de la segunda fila hay que hacer ceros los números por debajo de él

F2 × (5) + F3 → F3

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Ahora hacemos que el primer número de la tercera fila sea 1

F3 × (-3) → F3

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz anterior es una matriz escalonada. El sistema de ecuaciones equivalente es

$$\begin{aligned} x + 2y &= 9 \\ y &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Al observar la última ecuación en el sistema equivalente, se concluye que el sistema de ecuaciones es inconsistente y por lo tanto no tiene solución

Ejemplo 5: Solución de un sistema con infinitas soluciones

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de eliminación gaussiana

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \end{aligned}$$

Solución

El primer paso en cualquiera de los dos métodos es escribir la matriz aumentada del sistema, que consiste en agregar a la matriz de coeficientes una columna con los términos independientes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \end{array}\right]$$

Dividiendo la fila 1 entre 2 para obtener el primer 1

F1 ÷ (2) → F1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \end{array}\right]$$

Haciendo cero el 4 por debajo el pivote de la primera fila

$$\mathbf{F1 \times (-4) + F2 \rightarrow F2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{array}\right]$$

Dividiendo la fila 2 entre -3 para que el primer número distinto de cero en la segunda fila sea 1

$$\mathbf{F2 \div (-3) \rightarrow F2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

La matriz anterior es una matriz escalonada. El sistema de ecuaciones equivalente es

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

El sistema tiene infinitas soluciones pues tiene mas incógnitas que ecuaciones. El número de variables arbitrarias se obtiene restando el número de incógnitas menos el número de ecuaciones. En este ejemplo

Variables arbitrarias = 3 – 2 = 1

Despejando y en términos de z en la segunda ecuación se tiene

$$y = 4 - 2z$$

Despejando x en la primera ecuación y sustituyendo y

$$x = 9 - 3z - 2y$$

$$x = 9 - 3z - 2(4 - 2z)$$

$$x = 9 - 3z - 8 + 4z$$

$$x = 1 + z$$

La solución del sistema expresada en términos de la variable arbitraria z es

$$x = 1 + z$$

$$y = 4 - 2z$$

La solución puede expresarse matricialmente en la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} z$$

Para obtener soluciones particulares del sistema basta con asignar cualquier valor a la variable arbitraria z.

Por ejemplo si $z = 0$, se obtiene que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$x = 1, \quad y = 4, \quad z = 0$$

Por ejemplo si $z = -2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}(-2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$x = -1, \quad y = 8, \quad z = -2$$

Ejemplo 6: Solución de un sistema con infinitas soluciones

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 2x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Solución

El primer paso en cualquiera de los es escribir la matriz aumentada del sistema, que consiste en agregar a la matriz de coeficientes una columna con los términos independientes

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & -7 & -8 & -2 & 7 \end{array}\right]$$

Haciendo cero el 1 y el 2 por debajo el pivote de la primera fila

F1 × (-1) + F2 → F2

F1 × (-2) + F3 → F3

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -3 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Ahora con el primer uno de la segunda fila hay que hacer cero los números por arriba y por debajo del él

F2 × (3) + F1 → F1

F2 × (1) + F3 → F3

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz anterior es escalonada y reducida. El sistema equivalente de ecuaciones resultante es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 4x_3 - x_4 &= -7 \\ x_2 \qquad\qquad &= -3 \end{aligned}$$

Como el sistema tiene 4 incógnitas y dos ecuaciones, hay dos variables arbitrarias. La solución del sistema puede expresarse como

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 + 4x_3 + x_4 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}$$

En donde x_3 y x_4 pueden tomar cualquier valor.

Matricialmente la solución puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

Sistema homogéneo de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales se llama homogéneo si en todas las ecuaciones el término constante es igual a cero, es decir

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots &= 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver un sistema homogéneo pueden ocurrir dos cosas

i. El sistema tiene solución única: $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \cdots, x_n = 0$

ii. El sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 7: Solución de un sistema de ecuaciones homogéneo

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 13x_4 + 16x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & 13 & 16 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se omitirán las operaciones elementales realizadas para obtener la matriz escalonada reducida, se deja al estudiante que realice por su cuenta dichas operaciones. La matriz escalonada reducida del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la matriz escalonada reducida hay dos filas que tienen solo ceros, al reescribir el sistema de ecuaciones equivalente es

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Como el sistema tiene 5 incógnitas y solamente 2 ecuaciones, hay $5-2=3$ variables que pueden tomar cualquier valor, es decir que el sistema tiene infinitas soluciones. Despejando x_1 y x_2 se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & - & 2x_3 & - & x_4 & - & 4x_5 \\ x_2 & = & - & x_3 & + & 3x_4 & & \end{array}$$

Al escribir la solución del sistema en forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} x_5$$

Ahora se le pueden dar valores arbitrarios a x_3, x_4 y x_5 luego calcular los valores de x_1 y x_2 para hallar soluciones del sistema.

Ejercicios sección 1.2

Resuelva los sistemas de ecuaciones utilizando el método de eliminación gaussiana. Si el sistema tiene infinitas soluciones represente la solución en forma matricial.

1. $$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & -1 \\ 3x & - & y & = & 1 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} x+y+z-w=1 \\ x \quad +4z+2w=0 \\ \quad 2y-z-w=2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & -1 \\ 3x & - & y & = & 1 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{ccccccc} 8x & - & 3y & - & 5z & = & 1 \\ -16x & + & 6y & + & 10z & = & -2 \\ 32x & - & 12y & - & 20z & = & 4 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & w & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & w & + & z & = & -3 \\ 2x & + & 2y & - & 2w & - & 2z & = & 4 \\ x & - & y & + & w & - & z & = & 2 \end{array}$$

Utilice el método de Gauss-Jordan para encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones. si el sistema tiene infinitas soluciones exprese la solución en forma matricial.

7. $$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & 5y & - & 1 & = & 0 \end{array}$$

8. $$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

9. $$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & 5y & & & = & 1 \end{array}$$

10. $$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 5w & = & -7 \\ 2x & + & 4y & + & z & + & 3w & = & 1 \\ x & + & 2y & + & w & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 3z & + & 2w & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 4z & + & 7w & = & 2 \\ x & + & y & + & 4z & + & 2w & = & 5 \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{l} x - y - 3z = -1 \\ 2x - y - 4z = -8 \\ x + y - z = -1 \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{rrrcr} 8x & -3y & -5z & = & 1 \\ -24x & +9y & +15z & = & -3 \\ 40x & -15y & -25z & = & 5 \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{rrrcr} & +6y & -18z & = & 24 \\ x & +2y & +3z & = & 6 \\ 2x & +3y & +9z & = & 8 \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +2z & = & 2 \\ 3x & -2y & -2z & = & 5 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ x & +4y & +6z & = & 0 \end{array}$$

18.
$$\begin{array}{rrrrcr} x & +5y & +4z & -12w & = & 3 \\ 3x & -y & +2z & +w & = & 2 \\ 2x & +2y & +3z & -4w & = & 1 \end{array}$$

19.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 2z & + & 6w & = & 10 \\ & & y & + & 2z & + & w & = & 2 \\ 3x & & & - & 3z & + & 6w & = & 9 \end{array}$$

20.
$$\begin{array}{rcrrrcr} x & + & 4y & -z & +3w & = & 10 \\ 2x & + & 2y & -14z & & = & 44 \\ x & + & 8y & +4z & -8w & = & 3 \\ 5x & & +17y & -5z & +13w & = & 44 \end{array}$$

21.
$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +2z & = & 2 \\ 3x & -2y & -2z & = & 5 \\ 2x & -5y & +3z & = & -4 \\ x & +4y & +6z & = & 0 \end{array}$$

22.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 5y & + & 4z & - & 12w & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 2z & + & w & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & - & 4w & = & 1 \end{array}$$

Resuelva los sistemas de ecuaciones homogéneos utilizando el método de eliminación gaussiana o Gauss-Jordan, Si el sistema tiene infinitas soluciones represente la solución en forma matricial.

23.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & & & = & 0 \end{array}$$

24.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & & & = & 0 \end{array}$$

25.
$$\begin{array}{l} x + 2y + z - w = 0 \\ 3x \quad + 2z - 5w = 0 \end{array}$$

26.
$$\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +4z & -6w & = & 0 \\ 4x & +11y & +13y & -21w & = & 0 \\ 14x & +37y & +47z & -75w & = & 0 \\ 6x & +15y & +21z & -33w & = & 0 \end{array}$$

27.
$$\begin{array}{rrrrcl} x & -5y & +6z & +2w & = & 0 \\ 3x & -15y & +20z & +10w & = & 0 \\ 2x & -10y & +10z & & = & 0 \end{array}$$

28.
$$\begin{array}{rrrrcl} 2x & -y & +3z & -w & = & 0 \\ 3x & +2y & -z & +w & = & 0 \\ x & -3y & +z & -2w & = & 0 \\ -x & +y & +4z & +3w & = & 0 \end{array}$$

30. Considere el sistema:

$$\begin{array}{rrcl} 2x & -y & = & 0 \\ 3x & +ky & = & 0 \end{array}$$

¿Para qué valores de k el sistema tiene soluciones no triviales?

31. Determine los valores de k de tal forma que el sistema

$$\begin{array}{l} (k+1)x + 8y = 1 \\ x + (k-1)y = -1 \end{array}$$

a. tenga infinitas soluciones,

b. no tenga solución,

c. tenga única solución

32. Determine los valores de k de tal forma que el sistema

$$\begin{array}{rrcl} kx & +y & = & 1 \\ x & +ky & = & k \end{array}$$

a. tenga infinitas soluciones,

b. no tenga solución,

c. tenga única solución

33. Determine los valores de k de tal forma que el sistema

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ x & +k^2y & +z & = & 1 \\ kx & +y & +z & = & -2 \end{array}$$

a. tenga infinitas soluciones,

b. no tenga solución,

c. tenga única solución

34. Determine los valores de k de tal forma que el sistema

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +kz & = & 1 \\ 2x & +2y & +3z & = & 3 \end{array}$$

a. tenga infinitas soluciones,

b. no tenga solución,

c. tenga única solución