

1.1 Álgebra de matrices

OBJETIVOS

- Identificar los diferentes tipos de matrices.
- Efectuar operaciones de suma, resta, multiplicación por un escalar y producto de matrices
- Calcular la matriz transpuesta de una matriz.

Definición de matriz

Una matriz A es un arreglo rectangular de filas y columnas, usualmente se representa por m el número de filas y por n el número de columnas y se dice que es una matriz de $m \times n$. Las matrices se pueden representar utilizando corchetes o bien paréntesis.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para referirse a un elemento de la matriz se utilizan subíndices, por ejemplo, el elemento localizado en la tercera fila y segunda columna es a_{32} .

Por ejemplo, la siguiente es una matriz de 3×2 pues tiene 3 filas y 2 columnas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

El elemento localizado en la tercera fila y primera columna es $a_{31} = -5$.

Matrices especiales

Algunas matrices tienen características muy particulares que las hacen especiales, entre estas tenemos:

Matriz cuadrada

Es una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas, es decir que su tamaño es de $n \times n$. Por ejemplo la siguiente es una matriz cuadrada de 3×3

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

Es una matriz cuadrada que tiene como elementos el 1 en la diagonal principal y el 0 en todas las otras posiciones.

Formalmente es una matriz de $n \times n$ tal que $a_{ij} = 1$ si $i = j$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

A continuación se muestran las matrices identidad de 2×2 y de 3×3

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

Es una matriz cuadrada que tiene como elementos el 0 en todas las posiciones por debajo de la diagonal principal y cualquier número en la diagonal principal o por encima de ella.

Formalmente una matriz es triangular superior si $a_{ij} = 0$, cuando $i > j$. La siguiente es una matriz triangular superior de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Vector fila

Es una matriz que tiene solo una fila, es decir que su tamaño es $1 \times n$. Por ejemplo, la matriz siguiente es un vector fila de 5 columnas

$$B = [6 \quad -4 \quad 8 \quad 0 \quad 2]$$

Vector columna

Es una matriz que tiene solo una columna, es decir que su tamaño es $m \times 1$. El ejemplo siguiente muestra una matriz de 3 filas y una columna

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Las operaciones suma y resta, multiplicación por un número y producto de matrices se definen de la forma siguiente.

Suma y resta de matrices

Para sumar o restar dos matrices se suman o se restan los elementos que se encuentran en la misma posición, por lo tanto, solo se pueden sumar o restar matrices que son del mismo tamaño.

Formalmente si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son dos matrices de $m \times n$, entonces la suma y resta de A y B es una matriz $m \times n$ dada por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

Ejemplo 1: Suma e matrices

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcule: **a.** $A + B$

b. $A - B$

Solución

- a. Para efectuar la suma se suman los elementos que están en la misma posición

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- b. Para efectuar la resta se restan los elementos que están en la misma posición

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 8 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicación por un número

Para multiplicar una matriz por un número se multiplican todos los elementos de la matriz por el número.

Formalmente si k es un número real y A es una matriz $m \times n$, entonces la matriz kA es una matriz $m \times n$ dada por

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$$

Ejemplo 2: Multiplicación por un número

Dadas la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcule $4A$

Solución

$$\begin{aligned} 4A &= 4 \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 20 & 0 \\ -4 & 24 & 32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Producto de matrices

Para efectuar el producto de dos matrices es necesario que el número columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda, de otra forma el producto no está definido. El producto de matrices da como resultado una matriz que tiene el mismo número de filas que la primera y el mismo número de columnas que la segunda.

Formalmente, si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, (es decir que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz) entonces el producto matricial $C = AB$ es una matriz $m \times p$ (tiene el número de filas de la A y el número de columnas de B). Cada elemento c_{ij} del producto se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de A , por los correspondientes elementos de la columna j de B , es decir

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Ejemplo 3: Multiplicación de matrices

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcule: a. AB , b. BA , c. $B^2 - 2B$

Solución

- a. El producto AB si esta definido pues el número de columnas de A es igual al número de filas de B . Sea $C = AB$, entonces C tiene el número de filas de A y el número de columnas de B . Es decir que C es una matriz de 2×3 .

Los elementos del producto están dados por

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-2)(-2) + (5)(0) + (0)(2) = 4 \\ c_{12} &= (-2)(-4) + (5)(3) + (0)(-3) = 23 \\ c_{13} &= (-2)(5) + (5)(-1) + (0)(6) = -15 \\ c_{21} &= (-1)(-2) + (6)(0) + (8)(2) = 18 \\ c_{22} &= (-1)(-4) + (6)(3) + (8)(-3) = -2 \\ c_{23} &= (-1)(5) + (6)(-1) + (8)(6) = 37 \end{aligned}$$

El producto es entonces

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 23 & -15 \\ 18 & -2 & 37 \end{bmatrix}$$

- b. El producto BA no está definido pues el número de columnas de B no es igual al número de filas de A
- c. La potencia de una matriz se calcula de la misma forma que el producto, así

$$\begin{aligned} B^2 &= B \times B \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como B es una matriz cuadrada el número de filas es igual al número de columnas se tiene que el producto C está definido y es una matriz de 3×3 . Cada elemento del producto está dado por

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-2)(-2) + (-4)(0) + (5)(2) = 14 \\ c_{12} &= (-2)(-4) + (-4)(3) + (5)(-3) = -19 \\ c_{13} &= (-2)(5) + (-4)(-1) + (5)(6) = 24 \\ c_{21} &= (0)(-2) + (3)(0) + (-1)(2) = -2 \\ c_{22} &= (0)(-4) + (3)(3) + (-1)(-3) = 12 \\ c_{23} &= (0)(5) + (3)(-1) + (-1)(6) = -9 \\ c_{31} &= (2)(-2) + (-3)(0) + (6)(2) = 8 \\ c_{32} &= (2)(-4) + (-3)(3) + (6)(-3) = -35 \\ c_{33} &= (2)(5) + (-3)(-1) + (6)(6) = 49 \end{aligned}$$

Entonces

$$B^2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -19 & 24 \\ -2 & 12 & -9 \\ 8 & -35 & 49 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos calcular la operación requerida

$$B^2 - 2B = \begin{bmatrix} 14 & -19 & 24 \\ -2 & 12 & -9 \\ 8 & -35 & 49 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -19 & 24 \\ -2 & 12 & -9 \\ 8 & -35 & 49 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -8 & 10 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -11 & 14 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -29 & 37 \end{bmatrix}$$

Matriz transpuesta

La matriz transpuesta de una matriz A , se representa como A^T y se obtiene al intercambiar las filas por las columnas. Formalmente si A es una matriz $m \times n$, entonces A^T es una matriz $n \times m$ y cada elemento de la matriz transpuesta está dado por

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$$

Ejemplo 4: Matriz transpuesta

Calcule la matriz transpuesta de la matriz dada

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución

Se invierten las filas con las columnas, es decir que la primera fila de a será la primera columna en la matriz transpuesta y la segunda fila de A será la segunda columna en la matriz transpuesta

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Propiedades de las operaciones con matrices

En el siguiente cuadro se muestran algunas de las propiedades de las operaciones con matrices

PROPIEDADES
Si A , B y C son matrices de $m \times n$ y k y t son dos números reales, entonces
1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $k(A + B) = kA + kB$
4. $(k + t)A = kA + tA$
5. $(A^T)^T = A$
Si A , B y C son matrices de tales que los productos están definidos y k y t son dos números reales, entonces
6. $AB \neq BA$
7. $A(B + C) = AB + AC$
8. $(B + C)A = BA + CA$
9. $k(AB) = (kA) = A(kB)$
Si A es una matriz cuadrada de $n \times n$ y I es la matriz identidad de $n \times n$, entonces
10. $AI = IA = A$
11. $A^2 = AA$

Ejercicios de la sección 1.1

Resuelva los problemas que se muestran a continuación

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular: a. $2A + 3B$

b. CB

c. $B^2 - A^T$

2. Dadas Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular: a. $(BA^T)^T$

b. $3A - 2B$

c. $B^2 - A$

3. Dadas Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a. Calcular $(AB)^T - B^T A^T$

b. investigue si $B^2 - A^2 = (A - B)(A + B)$

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a. Calcule $(HA)^T - A^T H^T$ b. Investigue si $(A + H)^2 = A^2 + 2AH + H^2$

5. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones:

- a. $2A - 3B$ b. AB c. $(A + B)B^T$

6. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular: a. $2A + 3B$ b. CB c. $B^2 - A^T$

7. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Halle: a. $A - 2B$ b. $3A - B + 2C$ c. $(2A^T - C)^T$

8. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ -2 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Determine cuales de los productos siguientes están definidos

- i) AB ii) AC iii) CA iv) BC

b. Calcule los productos de la parte a) que estén definidos.