6.8 Otras identidades trigonométricas

OBJETIVOS

- Utilizar las identidades suma y diferencia de ángulos para demostrar otras identidades trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas.
- Utilizar las identidades de ángulos dobles para demostrar otras identidades y para resolver ecuaciones trigonométricas.
- Conocer las otras identidades trigonométricas y su utilidad para demostrar otras identidades y para la solución de ecuaciones trigonométricas.

Adicionalmente a las identidades fundamentales, la trigonometría cuenta con una gran variedad de identidades, entre ellas las identidades para ángulos negativos, las identidades de cofunción, las identidades de suma y diferencia de ángulos, las identidades de ángulos dobles, etc. Muchas de las identidades trigonométricas que se presentan en esta sección tienen aplicaciones muy específicas en el cálculo diferencial e integral.

Identidades de ángulos negativos

Las identidades para ángulos negativos se obtienen directamente del círculo trigonométrico.

El cuadro siguiente resume las identidades de ángulos negativos

IDENTIDADES DE ÁNGULOS NEGATIVOS

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

Identidades de cofunción

Estas identidades permiten expresar las funciones trigonométricas del ángulo θ en términos de la diferencia de ángulos $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Al igual que las identidades de ángulos negativos, se pueden deducir utilizando un círculo trigonométrico.

El cuadro siguiente resume las identidades de cofunción

IDENTIDADES DE COFUNCIÓN

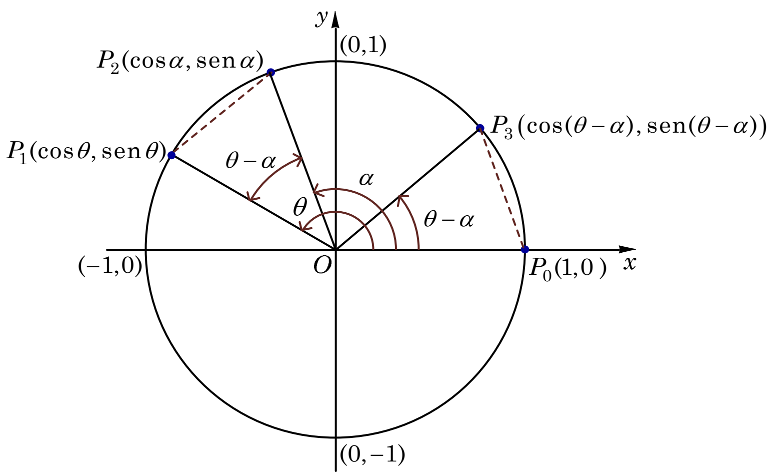
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

Identidades de una suma y diferencia de ángulos

Considere un ángulo agudo θ en posición estándar en un círculo trigonométrico y un punto $P_1(x,y)$ en el lado terminal del ángulo, según la definición de las funciones seno y coseno, se tiene que $\cos\theta = x$ y $\operatorname{sen}\theta = y$. Al sustituir estas expresiones, las coordenadas del punto se pueden expresar como $P_1(x,y) = P_1(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Procediendo de forma similar, se pueden expresar las coordenadas de los puntos P_2 y P_3 como se indica en la figura siguiente.



Es claro que la distancia del punto P_1 al punto P_2 es la misma que la distancia del punto P_0 al punto P_3. Al igualar éstas distancias se obtiene la siguiente ecuación.

$$\sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\alpha)^2} = \sqrt{(\cos(\theta-\alpha) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(\theta-\alpha) - 0)^2}$$

Al eliminar lar raíces y desarrollar los binomios se obtiene

$$\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2(\theta-\alpha) - 2\cos(\theta-\alpha) + 1 + \operatorname{sen}^2(\theta-\alpha)$$

$$2 - 2\cos\theta\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha = 2 - 2\cos(\theta-\alpha)$$

Resultando la identidad

$$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha$$

La identidad para $\cos(\theta+\alpha)$ se obtiene fácilmente utilizando la identidad anterior, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) &= \cos(\theta-(-\alpha))\\ &= \cos\theta\cos(-\alpha) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(-\alpha)\end{aligned}$$

Utilizando un círculo trigonométrico se puede ver qué $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$. Al sustituir estas últimas identidades en la expresión para $\cos(\theta+\alpha)$, se obtiene la identidad

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha$$

El cuadro siguiente resume las identidades para suma y diferencia de ángulos

Identidades de suma y diferencia de ángulos	
$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}(\theta-\alpha) = \operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \cos\theta\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}(\theta+\alpha) = \operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha$
$\tan(\theta+\alpha) = \dfrac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}$	$\tan(\theta-\alpha) = \dfrac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha}$

Las identidades de suma y diferencia de ángulos se pueden utilizar para calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas, para algunos valores angulares, como se muestra en el ejemplo siguiente

Ejemplo 1: Calculando el valor exacto de una función trigonométrica

Calcule el valor exacto de $\cos 75^{\circ}$

Solución

El ángulo de 75° puede expresarse como la suma de dos ángulos especiales

$$75^{\circ} = 30^{\circ} + 45^{\circ}$$

Ahora se puede utilizar la identidad para el coseno de una suma de ángulos, sustituyendo los valores ya conocidos de las funciones trigonométricas de ángulos especiales

$$\begin{aligned}\cos 75^{\circ} &= \cos(30^{\circ} + 45^{\circ}) \\ &= \cos 30^{\circ} \cos 45 - \operatorname{sen} 30^{\circ} \operatorname{sen} 45^{\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Las identidades de cofunción, se pueden demostrar utilizando las identidades de una diferencia de ángulos como se ilustra en el ejemplo siguiente

Ejemplo 2: Demostrando una identidad trigonométrica

Demuestre la identidad trigonométrica

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

Solución

Usando la identidad para la tangente de una suma de ángulos y desarrollando las operaciones resultantes se obtiene

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{(1)\cos\theta - (0)\operatorname{sen}\theta}{(0)\cos\theta + (1)\operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta\end{aligned}$$

Identidades de ángulos dobles

Las identidades de ángulo doble se obtienen fácilmente a partir de las identidades de suma de ángulos sustituyendo $\theta + \alpha = \theta + \theta = 2\theta$.

Como ejemplo se muestra la demostración de la identidad para $\operatorname{sen} 2\theta$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\theta) &= \operatorname{sen}(\theta + \theta)\\ &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\\ &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\end{aligned}$$

El siguiente cuadro resume las identidades de ángulo doble

IDENTIDADES DE ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Ejemplo 3: Demostrando una identidad trigonométrica

Demuestre la identidad trigonométrica

$$\tan(3x) = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

Solución

Al expresar el ángulo $3x = 2x + x$ y luego utilizar la identidad para la tangente de una suma de ángulos se tiene

$$\begin{aligned}\tan(3x) &= \tan(2x + x)\\ &= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x\tan x}\\ &= \frac{\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\cdot\tan x}\end{aligned}$$

Desarrollando las operaciones algebraicas y simplificando

$$\begin{aligned}\tan 3x &= \frac{\dfrac{2\tan x + \tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - \tan^2 x}}{\dfrac{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}{1 - \tan^2 x}}\\ &= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\end{aligned}$$

Identidades de medio ángulo

Si en la identidad $\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ se despeja $\operatorname{sen}\theta$ se tiene

$$2\,\text{sen}^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$$

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

Sustituyendo $\frac{\theta}{2}$ por θ se obtiene la identidad para $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

El siguiente cuadro resume las identidades de ángulo medio

Identidades de ángulo medio

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

Ejemplo 7: Calculando el valor exacto de una función trigonométrica

Obtenga el valor exacto de seno, coseno y tangente de $\alpha/2$, si $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ y α es un ángulo en el cuarto cuadrante.

Solución

Si α es un ángulo en el cuarto cuadrante, el seno es negativo, el coseno es positivo y la tangente es negativa. Por otro lado en el círculo trigonométrico $\cos\alpha = \frac{12}{13} = x$, utilizando la ecuación del círculo se puede encontrar el valor de y.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$= -\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{169-144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

Es decir que $\text{sen}\,\alpha = y = -\frac{5}{13}$

Ahora ya se pueden calcular los valores exactos para las funciones de $\alpha/2$. Nótese que si el ángulo α está en el cuarto cuadrante, también $\alpha/2$ está en el cuarto cuadrante.

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{-\frac{5}{13}}{1+\frac{12}{13}} = -\frac{5}{25} = -\frac{1}{5}$$

Ejemplo 7: Demostrando una identidad con ángulos dobles y mitad de ángulos

Demuestre la identidad trigonométrica

$$\frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x}{\cos x + \cos 2x} = -\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Solución

Utilizando las identidades de ángulo doble en el lado izquierdo y efectuando las operaciones resultantes

$$\frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x}{\cos x + \cos 2x} = -\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen}x - (2\operatorname{sen}x\cos x)}{\cos x + (2\cos^2 x - 1)} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}x\cos x}{2\cos^2 x + \cos x - 1} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}x(1 - 2\cos x)}{(\cos x + 1)(2\cos x - 1)} =$$

$$-\frac{\operatorname{sen}x(2\cos x - 1)}{(\cos x + 1)(2\cos x - 1)} =$$

$$-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x + 1} =$$

$$-\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ejercicios de la sección 6.8

En los ejercicios 1 a 6 utilice las fórmulas de cofunción para expresar la función trigonométrica en términos del ángulo complementario.

1. $\operatorname{sen}40^\circ$ **2.** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

3. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **4.** $\tan 125^\circ$

5. $\cos\left(\frac{15\pi}{13}\right)$ **6.** $\sec\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

En los ejercicios 7 a 21 utilice las fórmulas de suma o diferencia de ángulos para encontrar el valor exacto de la expresión dada.

7. $\operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ)$ **8.** $\cos(330^\circ + 45^\circ)$

9. $\cos 15^\circ$ **10.** $\operatorname{sen}165^\circ$

11. $\tan 345^\circ$ **12.** $\cos 195^\circ$

13. $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ **14.** $\tan\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$

15. $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ **16.** $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

17. $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **18.** $\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

19. $\cos 212^{\circ}\cos 122^{\circ}+\operatorname{sen} 212^{\circ}\operatorname{sen} 122^{\circ}$

20. $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

21. $\dfrac{\tan(\pi/6)+\tan(\pi/3)}{1-\tan(\pi/6)\tan(\pi/3)}$

En los ejercicios 22 a 30 escriba la expresión en términos de una sola función trigonométrica

22. $\operatorname{sen} 7x\cos 2x-\cos 7x\operatorname{sen} 2x$

23. $\operatorname{sen} 3x\cos x+\cos 3x\operatorname{sen} x$

24. $\cos 3x\cos x+\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x$

25. $\cos 5x\cos 4x-\operatorname{sen} 5x\operatorname{sen} 4x$

26. $\cos(5x)\cos(-2x)-\operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(-2x)$

27. $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

28. $\cos\left(\frac{3x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

29. $\dfrac{\tan(3x)+\tan(4x)}{1-\tan(3x)\tan(4x)}$

30. $\dfrac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}$

En los ejercicios 31 a 35 calcule lo que se indica en cada caso

31. Si $\tan\alpha=-4/3$, α está en el IV cuadrante y $\tan\beta=15/8$, β está en el III cuadrante, calcule $\cos(\alpha-\beta)$.

32. Si $\tan\alpha=24/7$, α está en el I cuadrante y $\operatorname{sen}\beta=-8/17$, β está en el III cuadrante, calcule $\tan(\alpha+\beta)$.

33. Si $\operatorname{sen}\alpha=-4/5$, α está en el III cuadrante y $\cos\beta=-12/13$, β está en el II cuadrante, calcule $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.

34. Si $\operatorname{sen}\alpha=-7/25$, α está en el IV cuadrante y $\cos\beta=8/17$, β está en el IV cuadrante, calcule $\cos(\alpha+\beta)$.

35. Si $\tan\alpha=15/8$, α está en el I cuadrante y $\tan\beta=-7/24$, β está en el IV cuadrante, calcule $\tan(\alpha-\beta)$.

En los ejercicios 36 a 46, demuestre la identidad trigonométrica utilizando las fórmulas de suma o diferencia de ángulos.

36. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$

37. $\operatorname{sen}(\pi+x)=-\operatorname{sen} x$

38. $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}$

39. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

40. $\operatorname{sen} 6x\cos 2x-\cos 6x\operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} 2x\cos 2x$

41. $\cos(\theta-\beta)-\cos(\theta+\beta)=2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta$

42. $\dfrac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}=\dfrac{\cot x+\cot y}{1+\cot x\tan y}$

43. $\dfrac{\cos(x-y)}{\cos x\operatorname{sen} y}=\cot y+\tan x$

44. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x-y\right)=\cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

45. $\operatorname{sen} 3x=3\operatorname{sen} x-4\operatorname{sen}^3 x$

46. $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

En los ejercicios 47 a 50 escriba la expresión trigonométrica en términos de una función trigonométrica de un solo ángulo

47. $\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta$

48. $\cos^2 2\theta-1$

49. $\cos^2 3\theta-\operatorname{sen}^2 3\theta$

50. $\dfrac{2\tan 4\theta}{1-\tan^2 4\theta}$

En los ejercicios 51 a 55 utilice las identidades de ángulo medio para encontrar el valor exacto de la expresión

51. $\tan 165^{\circ}$

52. $\cos 157.5^{\circ}$

53. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

54. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

55. $\tan\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

En los ejercicios 56 a 60 obtenga el valor exacto de $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ en base a la información dada

56. $\cos\theta=\frac{24}{25}$, θ está en el IV cuadrante.

57. $\operatorname{sen}\theta=-\frac{9}{41}$, θ está en el III cuadrante.

58. $\tan\theta = \frac{15}{8}$, θ está en el I cuadrante.

59. $\cos\theta = -\frac{40}{41}$, θ está en el II cuadrante.

60. $\tan\theta = -\frac{40}{9}$, θ está en el IV cuadrante.

En los ejercicios 61 a 65 obtenga el valor exacto de $\operatorname{sen}(\theta/2)$, $\cos(\theta/2)$ y $\tan(\theta/2)$ en base a la información dada.

61. $\cos\theta = -\frac{8}{17}$, θ está en el II cuadrante.

62. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{25}$, θ está en el III cuadrante.

63. $\tan\theta = \frac{4}{3}$, θ está en el I cuadrante.

64. $\cos\theta = -\frac{40}{41}$, θ está en el II cuadrante.

65. $\csc\theta = -\frac{17}{15}$, θ está en el IV cuadrante.

En los ejercicios 66 a75 demuestre la identidad trigonométrica

66. $\operatorname{sen} 3x \cos 3x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 6x$

67. $\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \cot x$

68. $1 - \tan^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$

69. $\operatorname{sen} 4x = 4\operatorname{sen} x\cos^3 x - 4\cos x\operatorname{sen}^3 x$

70. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

71. $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sec x + 1}{2\sec x}$

72. $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

73. $\cot x = \cot\left(\frac{x}{2}\right) - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

74. $\frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

75. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x + \cos x}$