6.4 Gráficas trigonométricas

OBJETIVOS

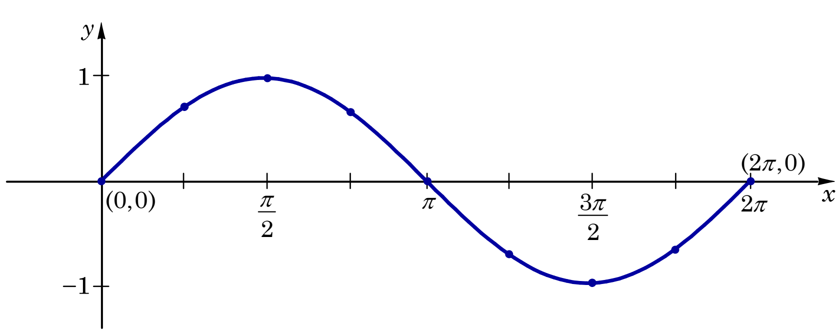
- Dibujar las gráficas de las funciones seno y coseno.
- Dibujar las gráficas de las transformaciones de las funciones seno y coseno.
- Resolver problemas en los cuales el modelo es una transformación de la gráfica de una función seno o coseno.
- Conocer y entender las gráficas de las otras funciones trigonométricas.

La gráfica de la función seno

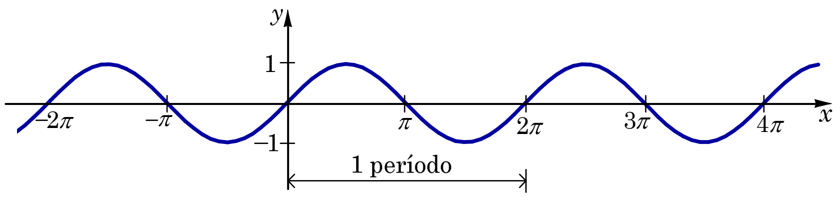
La gráfica de la función trigonométrica $f(x) = \operatorname{sen} x$ se puede dibujar en un sistema de coordenadas rectangulares dibujando los puntos, en donde la coordenada x es el valor angular expresado en números reales y le coordenada y corresponde al $\operatorname{sen} x$. Para obtener una primera representación de la gráfica se construirá una tabla de valores en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$, tomando algunos valores angulares en dicho intervalo. El valor de $\operatorname{sen} x$ se puede obtener de forma exacta o bien en forma aproximada utilizando una calculadora en el modo de radianes.

x	$y = \operatorname{sen} x$
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.71$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.71$
π	0
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.71$
$3\pi/2$	-1
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.71$
2π	0

Al dibujar los puntos de la tabla anterior y trazar una curva suave que una todos los puntos se obtiene la gráfica siguiente



El dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales y además es una función periódica, de período 2π ; razón por la cual, la gráfica anterior solo muestra un período. Al repetir esta curva en intervalos de 2π , se obtiene la gráfica completa de la función seno, como se muestra en la siguiente figura



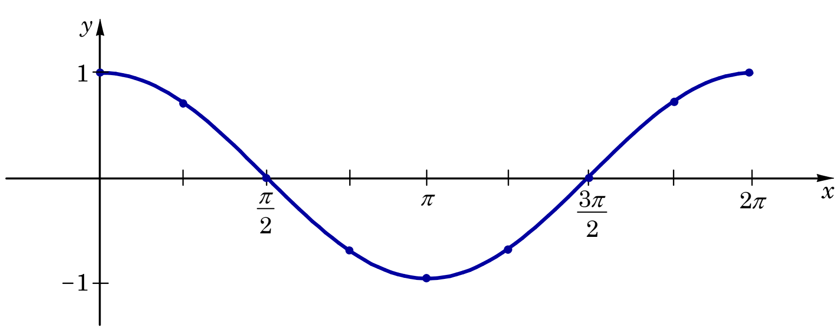
Resumiendo entonces, la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, tiene dominio $(-\infty,\infty)$, el rango de la función es el intervalo $[-1,1]$ y el período de la función es 2π .

La gráfica de la función coseno

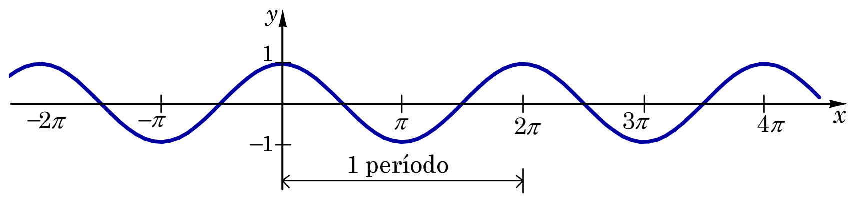
Procediendo de la misma forma que para la función seno, se construirá una tabla de valores en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$, tomando algunos valores angulares en dicho intervalo. El valor de $\cos x$ se puede obtener de forma exacta o bien en forma aproximada utilizando una calculadora en el modo de radianes.

x	$y = \cos x$
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.71$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.71$
π	-1
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.71$
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.71$
2π	1

Al dibujar los puntos de la tabla anterior y trazar una curva suave que una todos los puntos se obtiene la gráfica siguiente



El dominio de la función coseno es el conjunto de todos los números reales y además es una función periódica, de período 2π ; razón por la cual, la gráfica anterior solo muestra un período. Al repetir esta curva en intervalos de 2π, se obtiene la gráfica completa de la función coseno, como se muestra en la siguiente figura

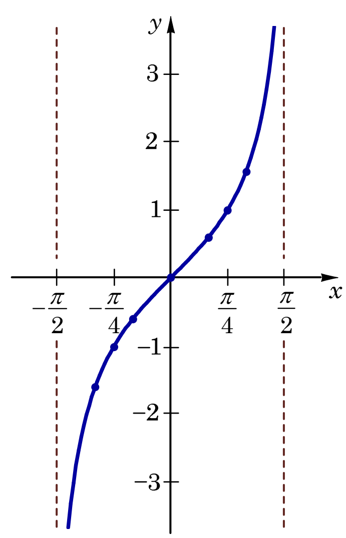


La gráfica de la función tangente

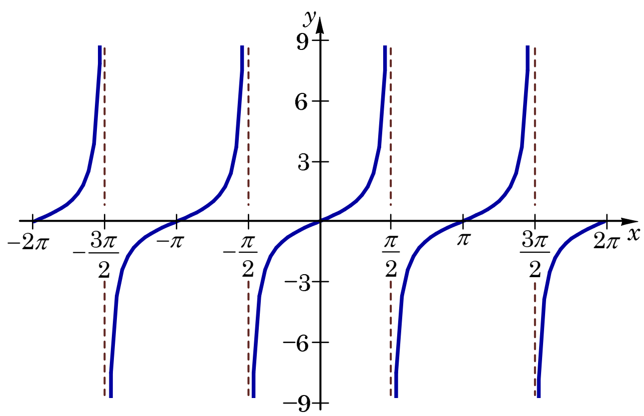
Para obtener una primera representación de la gráfica se construirá una tabla de valores en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tomando algunos valores angulares en dicho intervalo. El valor de $\tan x$ se puede obtener de forma exacta o bien en forma aproximada utilizando una calculadora en el modo de radianes.

x	$y = \tan x$
$-\pi/2$	No definida
$-\pi/3$	$-\sqrt{3} \approx -1.73$
$-\pi/4$	-1
$-\pi/6$	$-\sqrt{3}/3 \approx -0.58$
0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3 \approx 0.58$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3} \approx 1.73$
$\pi/2$	No definida

Observe que la función tangente no está definida para $-\pi/2$ y $\pi/2$, por esta razón la gráfica de la función tiene como asíntotas verticales las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$. Al dibujar los puntos de la tabla anterior y trazar una curva suave que una todos los puntos se obtiene la gráfica siguiente



El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos números en donde la gráfica tiene una asíntota vertical; estos números son $\frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es cualquier entero. El rango de la función tangente es $(-\infty,\infty)$. La función tangente es periódica, de período π. Al repetir la gráfica de la figura anterior en intervalos de π, se obtiene la gráfica completa de la función tangente, como se muestra en la siguiente figura



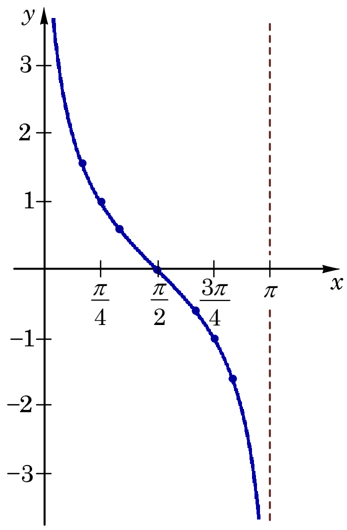
La gráfica de la función cotangente

Para obtener una primera representación de la gráfica se construirá una tabla de valores en el intervalo $0 \le x \le \pi$, tomando algunos valores angulares en dicho intervalo. El valor de $\cot x$ se puede obtener de forma exacta o bien en forma aproximada utilizando una calculadora en el modo de radianes. Muchas calculadoras no tienen incorporada la función cotangente, por lo que hay que expresar la cotangente como recíproca de la función tangente, es decir

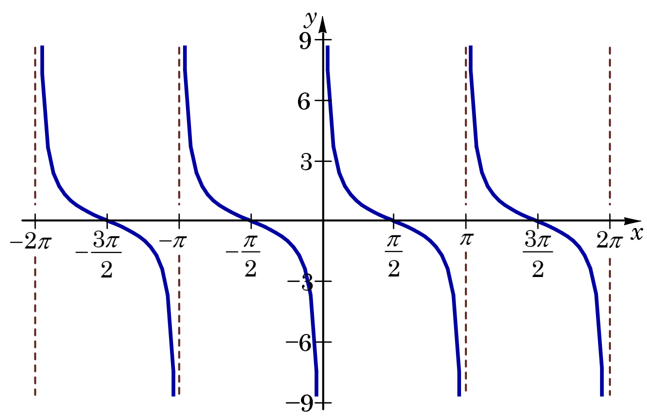
$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

x	$y = \cot x$
0	No definida
$\pi/6$	$\sqrt{3} \approx 1.73$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/3 \approx 0.58$
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	$-\sqrt{3}/3 \approx -0.58$
$3\pi/4$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3} \approx -1.73$
π	No definida

Observe que la función cotangente no está definida para $x = 0$ y $x = \pi$. La gráfica de la función tiene como asíntotas verticales las rectas $x = 0$ y $x = \pi$. Al dibujar los puntos de la tabla anterior y trazar una curva suave que una todos los puntos se obtiene la gráfica siguiente



El dominio de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos números en donde la gráfica tiene una asíntota vertical; estos números son $x = k\pi$, donde k es cualquier entero. El rango de la función cotangente es $(-\infty, \infty)$. La función cotangente es periódica, de período π. Al repetir la gráfica de la figura anterior en intervalos de π, se obtiene la gráfica completa de la función cotangente, como se muestra en la siguiente figura



La gráfica de la función secante

Como la función secante es la recíproca de la función coseno, es decir que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, se puede construir una tabla de valores para la función secante a partir de la tabla de valores de la función coseno. Por ejemplo

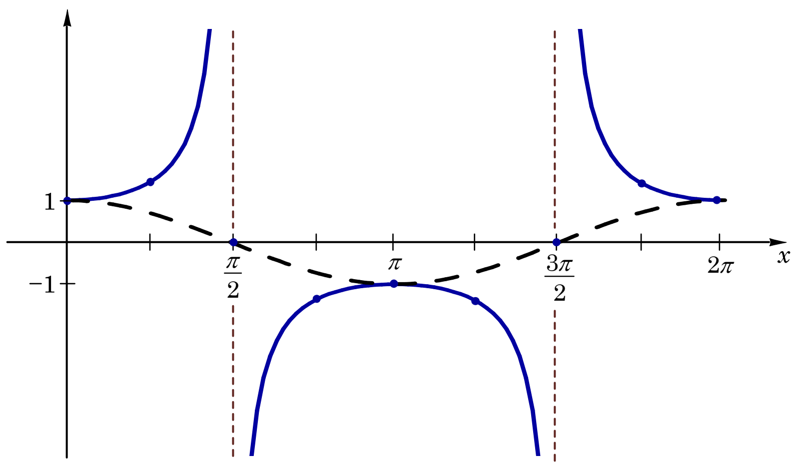
$$\cos(0) = 1, \qquad \text{entonces } \sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{entonces } \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

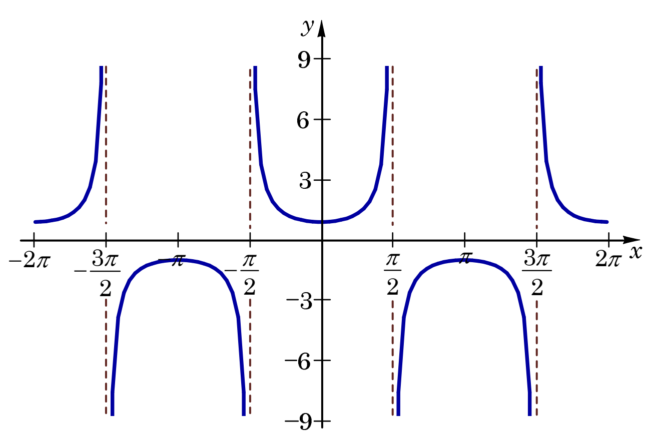
Al utilizar una calculadora científica, el procedimiento para calcular la secante es similar ya que la mayoría de calculadoras no traen la función secante. En la tabla siguiente se han tabulado algunos valores de la función secante. Estos valores serán utilizados para trazar la gráfica de la función.

x	$y = \sec x$
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2} \approx 1.41$
$\pi/2$	No definida
$3\pi/4$	$-\sqrt{2} \approx -1.41$
π	-1
$5\pi/4$	$-\sqrt{2} \approx -1.41$
$3\pi/2$	No definida
$7\pi/4$	$\sqrt{2} \approx 1.41$
2π	1

La función secante no está definida para $x = \frac{\pi}{2}$ ni para $x = \frac{3\pi}{2}$ y la gráfica de la función tiene asíntotas verticales en las rectas $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. La siguiente figura muestra la gráfica de la función secante en color azul y en línea discontinua de color negro la gráfica de la función coseno.



El dominio de la función secante está formado por todos los números reales, excepto los números $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un entero cualquiera. El rango de la función secante está formado por todos los números en el intervalo $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. La siguiente figura muestra la gráfica completa de la función secante.



La gráfica de la función cosecante

Como la función cosecante es la recíproca de la función seno, es decir que $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, se puede construir una tabla de valores para la función cosecante a partir de la tabla de valores de la función seno. Por ejemplo

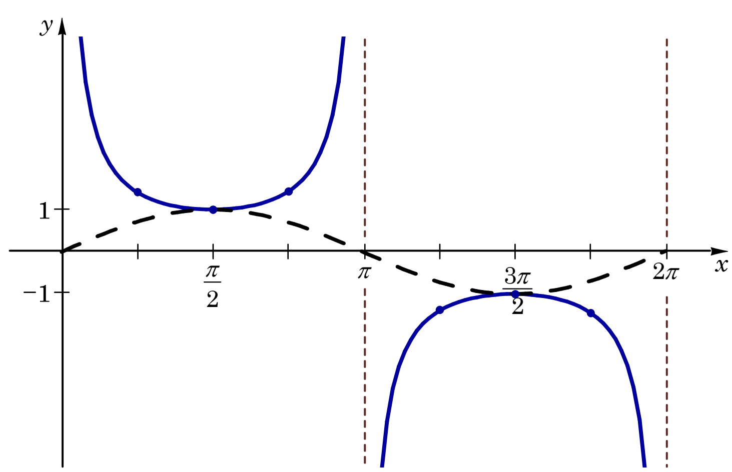
$$\operatorname{sen}(0) = 0, \qquad \text{entonces } \csc(0) = \frac{1}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{1}{0}, \text{ no está definida}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{entonces } \csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

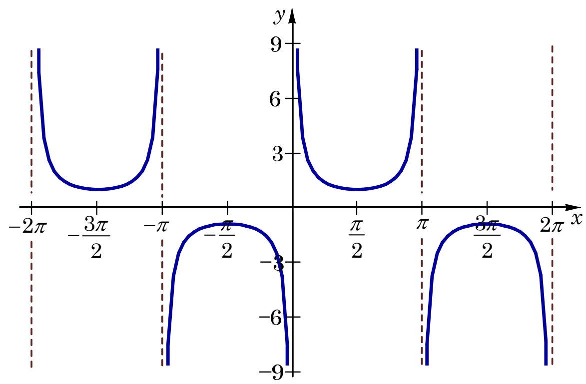
Al utilizar una calculadora científica, el procedimiento para calcular la cosecante es similar ya que la mayoría de calculadoras no traen incluida ésta función. En la tabla siguiente se han tabulado algunos valores de la función cosecante, valores que serán utilizados para trazar la gráfica de la función.

x	$y = \sec x$
0	No definida
$\pi/4$	$\sqrt{2} \approx 1.41$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2} \approx 1.41$
π	No definida
$5\pi/4$	$-\sqrt{2} \approx -1.41$
$3\pi/2$	-1
$7\pi/4$	$-\sqrt{2} \approx -1.41$
2π	No definida

La función cosecante no está definida para $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$ ya que la función seno es igual a cero en esos valores de x, razón por la cual la gráfica de la función tiene asíntotas verticales en las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$. La siguiente figura muestra la gráfica de la función cosecante en color azul y en línea discontinua de color negro la gráfica de la función seno.



El dominio de la función cosecante está formado por todos los números reales, excepto los números $x = k\pi$, donde k es un entero cualquiera. En esos números la gráfica de la función tiene asíntotas verticales. El rango de la función secante está formado por todos los números reales en el intervalo $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. La siguiente figura muestra la gráfica completa de la función cosecante.



Transformaciones de las gráficas de las funciones seno y coseno

En ésta sección se estudia la representación gráfica de las funciones

$$f(x) = a\,\text{sen}(bx + c) \quad \text{y} \quad f(x) = a\cos(bx + c)$$

Las funciones anteriores pueden expresarse en la forma

$$f(x) = a\,\text{sen}\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] \quad \text{y} \quad f(x) = a\cos\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$$

En donde se pueden aplicar los criterios de transformación de funciones estudiados anteriormente. El número $-\frac{c}{b}$ corresponde a una traslación horizontal y es llama **desplazamiento de fase**. El número b produce una compresión o un estiramiento horizontal y determina el **período** de la gráfica ya que el período está dado por $\frac{2\pi}{|b|}$. El número a produce una compresión o un estiramiento vertical y determina la **amplitud** de la gráfica $|a|$. Un intervalo para dibujar un ciclo de la gráfica se puede obtener resolviendo la desigualdad

$$0 \le bx + c \le 2\pi$$

$$-c \le bx \le 2\pi - c$$

$$-\frac{c}{b} \le x \le \frac{2\pi - c}{b}$$

El siguiente teorema resume los conceptos necesarios para dibujar la representación gráfica

TEOREMA SOBRE AMPLITUD, PERÍODO Y DESPLAZAMIENTO DE FASE

Si $f(x) = a\,\text{sen}(bx + c)$ o bien $f(x) = a\cos(bx + c)$, se definen para números reales a, b y c, con a y b diferentes de cero, entonces

1. La amplitud de la gráfica es $|a|$. El período es $\frac{2\pi}{|b|}$. El desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$
2. Un intervalo que contiene exactamente un ciclo de la gráfica se puede encontrar resolviendo la desigualdad

$$0 \le bx + c \le 2\pi$$

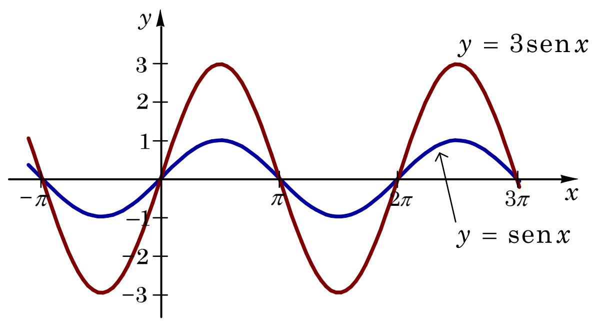
Ejemplo 1: Amplitud de las gráficas trigonométricas seno y coseno

Dibuje la representación gráfica de las funciones

a. $y = 3\operatorname{sen} x$ **b.** $y = -\frac{1}{2}\cos x$

Solución

a. Para dibujar la gráfica de la función $y = 3\operatorname{sen} x$, observe que $a = 3$, por lo tanto la amplitud es $|a| = 3$. Como el valor $b = 1$ y el valor $c = 0$, la gráfica no tiene desplazamiento de fase y el periodo es el mismo que el de la función $y = \operatorname{sen} x$, por lo tanto el intervalo para dibujar un ciclo completo de la gráfica es $[0, 2\pi]$. La siguiente figura muestra la representación gráfica de las funciones $y = 3\operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} x$.



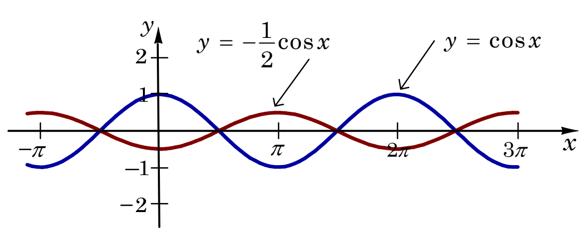
b. Para dibujar la gráfica de la función $y = -\frac{1}{2}\cos x$ se tiene que

La amplitud = $|a| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

El período es = $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

El desplazamiento de fase = $-\frac{c}{b} = -\frac{0}{1} = 0$ (no hay desplazamiento de fase).

Para trazar la gráfica, hay que trazar una curva de la función coseno, que suba 0.5 sobre el eje de las x y baje 0.5 del eje x ya que la amplitud es $\frac{1}{2}$. Trazar un ciclo completo en el intervalo $[0, 2\pi]$ ya que tiene período 2π y no está desplazada horizontalmente. Adicionalmente hay que considerar que la gráfica está reflejada en el eje x ya que está precedida de un signo negativo. La figura siguiente muestra la representación gráfica de las funciones $y = -\frac{1}{2}\cos x$ & $y = \cos x$



Ejemplo 2: Amplitud y período de las gráficas trigonométricas seno y coseno

Dibuje la representación gráfica de las funciones

a. $y = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ **b.** $y = -2\operatorname{sen}\pi x$

Solución

a. Para dibujar la gráfica de la función $y = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ se tiene que

La amplitud $= |a| = |4| = 4$

Es decir que la gráfica sube 4 unidades y baja 4 unidades del eje x

El período es $= \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

El desplazamiento de fase $= -\frac{c}{b} = -\frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$ (no hay desplazamiento de fase).

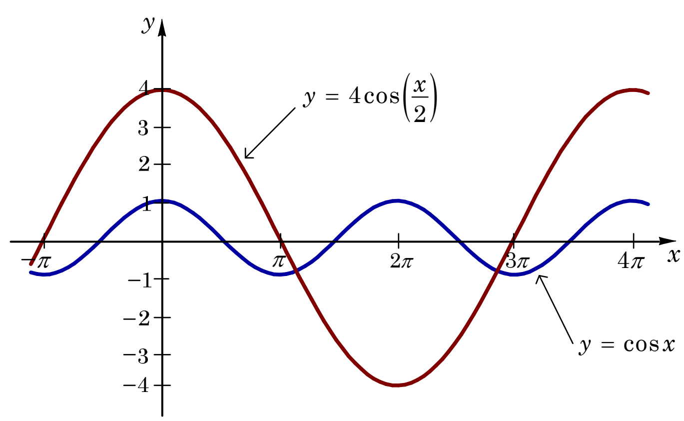
Un intervalo para dibujar un ciclo de la gráfica se encuentra resolviendo la desigualdad

$$0 \le bx + x \le 2\pi$$

$$0 \le \frac{1}{2}x \le 2\pi$$

$$0 \le x \le 4\pi$$

La representación gráfica de las funciones $y = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ & $y = \cos x$ se muestra en la figura siguiente.



b. Para dibujar la gráfica de la función $y = -2\operatorname{sen}\pi x$ se tiene que

La amplitud $= |a| = |-2| = 2$

Es decir que la gráfica sube 2 unidades y baja 2 unidades del eje x

El período es $= \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

El desplazamiento de fase $= -\frac{c}{b} = -\frac{0}{\pi} = 0$ (no hay desplazamiento de fase).

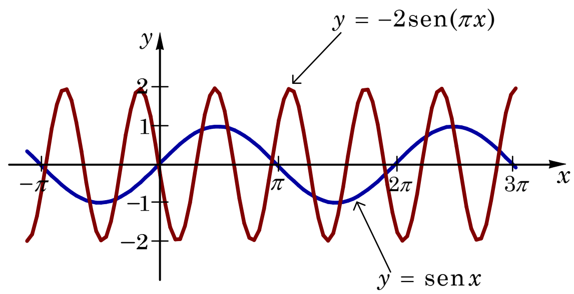
Un intervalo para dibujar un ciclo de la gráfica se encuentra resolviendo la desigualdad

$$0 \le bx + x \le 2\pi$$

$$0 \le \pi x \le 2\pi$$

$$0 \le x \le 2$$

La representación gráfica de las funciones $y = -2\operatorname{sen}\pi x$ & $y = \operatorname{sen} x$ se muestra en la figura siguiente, observe que se encuentra reflejada en el eje x, pues está precedida de un signo negativo.



Ejemplo 3: Amplitud y período y desplazamiento de fase de las gráficas trigonométricas seno y coseno

Dibuje la representación gráfica de la función

$$y = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$$

Solución

La gráfica de ésta función incluye todas las transformaciones posibles en una función trigonométrica: amplitud, período, desplazamiento de fase y traslación vertical.

La amplitud $= |a| = |4| = 4$

Es decir que la gráfica sube 4 unidades y baja 4 unidades de su eje central, que en este caso es la recta $y = -2$ pues la función tiene una traslación vertical de dos unidades hacia abajo.

El período es $= \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Es decir que la gráfica desarrolla un ciclo completo en un intervalo de longitud π.

El desplazamiento de fase $= -\dfrac{c}{b} = -\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2} = -\dfrac{\pi}{6}$

Es decir que la gráfica se encuentra trasladada hacia la izquierda $\frac{\pi}{6}$.

Un intervalo para dibujar un ciclo de la gráfica se encuentra resolviendo la desigualdad

$$0 \le bx + x \le 2\pi$$

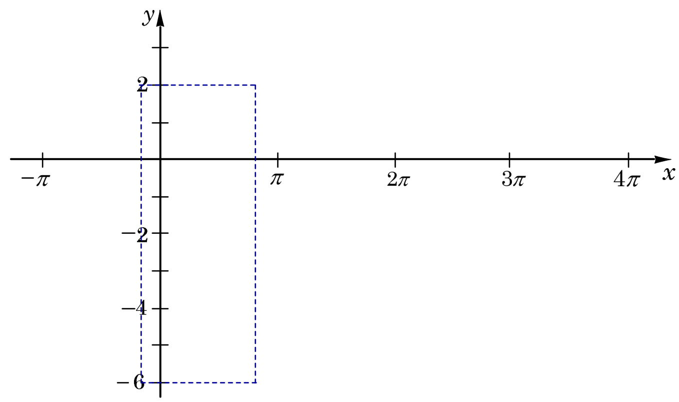
$$0 \le 2x + \frac{\pi}{3} \le 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{3} \le 2x \le 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

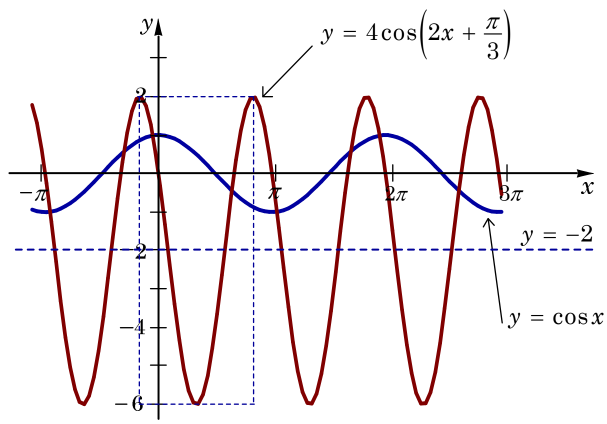
$$-\frac{\pi}{3} \le 2x \le \frac{5\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$$

La siguiente figura muestra un recuadro con una línea punteada en el cual se debe dibujar un ciclo de la función.



La siguiente figura muestra la gráfica requerida.

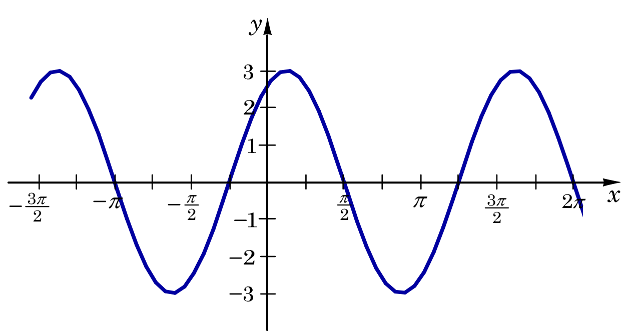


Ejemplo 4: Encontrar la ecuación de una gráfica trigonométrica

La figura muestra la gráfica de una función trigonométrica.

a. Encuentre la amplitud, el período y el desplazamiento de fase.

b. Escriba una ecuación de la forma $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$, para $a > 0, b > 0$ y c el menor número real positivo.



Solución

Para resolver este problema se comenzará estableciendo el valor de la amplitud a. Observe que la gráfica oscila entre –3 y 3, por lo que su amplitud es

$$a = 3$$

Como la gráfica corresponde a una función seno, observe que un ciclo completo se desarrolla entre los valores de $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$, por lo tanto el periodo es

$$\text{Periodo} = \frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

Como el periodo es $\frac{2\pi}{b}$, se puede obtener el valor de b de la siguiente forma

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{3\pi}{2}$$

$$b = \frac{4\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

Como el valor de c debe ser positivo, la gráfica debe considerarse desplazada hacia la izquierda. Observe que un ciclo comienza en $x = -\frac{\pi}{4}$, por lo que el desplazamiento de fase será $-\frac{\pi}{4}$. Como el desplazamiento de fase es igual a $-\frac{c}{b}$, el valor de c se obtiene de la forma siguiente

$$-\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$$

$$c = \frac{\pi b}{4} = \frac{\pi\left(\frac{2}{3}\right)}{4} = \frac{\pi}{6}$$

Por lo tanto una fórmula para la gráfica de la función es

$$f(x) = a\,\text{sen}(bx + c)$$

$$f(x) = 3\,\text{sen}\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Para finalizar esta sección se incluye un ejemplo que muestra una de las muchas aplicaciones que tienen las gráficas trigonométricas de las funciones seno y coseno.

Ejemplo 5: Aplicaciones de las gráficas trigonométricas

La gran rueda de la fortuna de Londres, London Eye, tiene un diámetro de 120 metros y una altura máxima de 135 metros. La rueda tarda aproximadamente media hora en completar una vuelta completa. La altura H sobre el suelo a la cual se encuentra una cápsula está dada por

$$H(t) = 75 + 60\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{15} - \frac{\pi}{2}\right), \qquad t \geq 0$$

Donde el tiempo t está en minutos. Calcule el período, amplitud, desplazamiento de fase y dibuje la representación gráfica de la función en un período completo.

Solución

La amplitud de la función es

$$\text{Amplitud} = |a| = |60| = 60$$

El período es

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30 \text{ minutos}$$

Es decir que la gráfica desarrolla un ciclo completo en un intervalo de longitud 30 minutos.

El desplazamiento de fase es

$$\text{Desplazamiento de fase} = -\frac{c}{b} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{15}} = 7.5 \text{ minutos}$$

Es decir que la gráfica se encuentra trasladada hacia la derecha 7.5 minutos.

Un intervalo para dibujar un ciclo de la gráfica se encuentra resolviendo la desigualdad

$$0 \leq bx + x \leq 2\pi$$

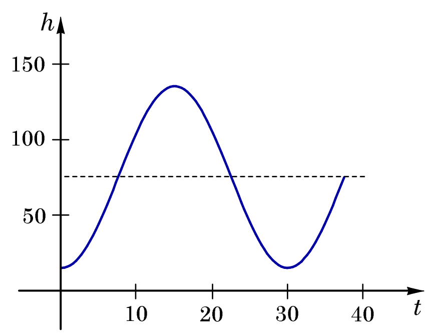
$$0 \leq \frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{15}t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{15}{2} \leq t \leq \frac{75}{2}$$

Finalmente observe que la función se encuentra desplazada 75 metros hacia arriba.

La siguiente figura muestra la representación gráfica de la función



Ejercicios de la sección 6.4

En los ejercicios 1 a 20 obtenga la amplitud, el período y dibuje la gráfica de la función.

1. $y = 3\,\text{sen}\,x$

2. $y = \frac{1}{2}\cos x$

3. $y = \text{sen}\,2x$

4. $y = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

5. $y = \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$

6. $y = \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$

7. $y = 2\,\text{sen}(\pi x)$

8. $y = 3\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$

9. $y = -\frac{4}{3}\text{sen}(3x)$

10. $y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$

11. $y = -3\,\text{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$

12. $y = -4\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

13. $y = -2\,\text{sen}(1.5x)$

14. $y = -\dfrac{1}{3}\cos(4x)$

15. $y = |2\operatorname{sen} 3x|$

16. $y = \left|\dfrac{1}{2}\cos 2x\right|$

17. $y = \left|4\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$

18. $y = -|3\cos \pi x|$

19. $y = -\left|3\operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{3}\right)\right|$

20. $y = -\left|2\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right|$

En los ejercicios 21 a 35 obtenga la amplitud, el período, desplazamiento de fase Encuentre un intervalo para un ciclo completo de la función y dibuje la gráfica de la función en ese intervalo.

21. $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

22. $y = \dfrac{1}{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

23. $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

24. $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

25. $y = 2\cos\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

26. $y = \dfrac{5}{2}\operatorname{sen}\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

27. $y = -3\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

28. $y = -4\operatorname{sen}\left(\dfrac{3x}{2} + 2\pi\right)$

29. $y = 4\operatorname{sen}(\pi x - 2) + 1$

30. $y = 2\cos\left(\dfrac{\pi x}{2} + 1\right) - 2$

31. $y = -3\cos(2\pi x - 3) - \dfrac{3}{2}$

32. $y = -\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}(2\pi x - 3) + 3$

33. $y = 10\cos\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 2$

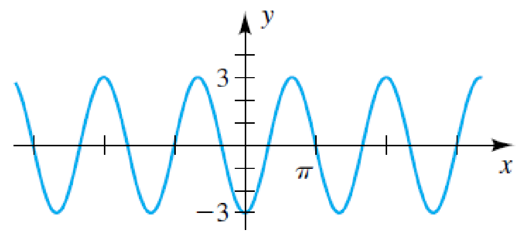
34. $y = 10\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10} + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2$

35. $f(t) = \dfrac{1}{20}\cos(60\pi t)$

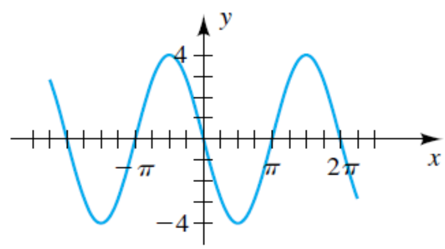
En los problemas 36 a 40 se muestra la gráfica de una función trigonométrica, encuentre la amplitud, período, desplazamiento de fase y una fórmula para la función de la forma

$$f(x) = a\operatorname{sen}(bx + c)$$

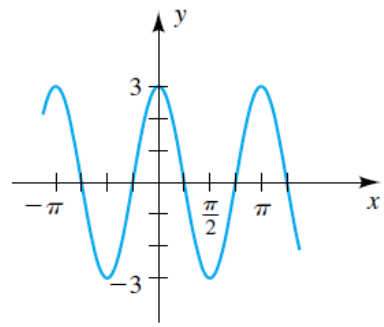
36.



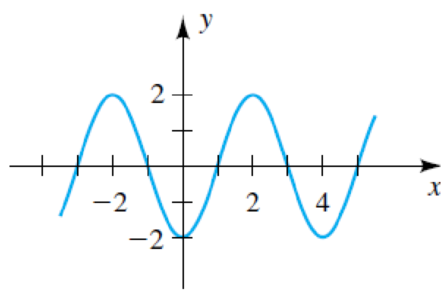
37.



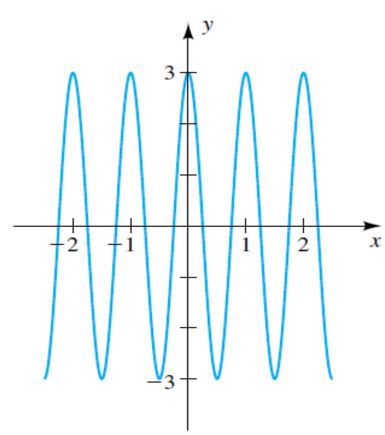
38.



39.



40.



41. Encuentre una función senoidal y dibuje su representación gráfica si ésta tiene un período de π, una amplitud de 4 y un desplazamiento de fase hacia la izquierda de $\frac{\pi}{6}$

42. Encuentre una función cosenoidal y dibuje su representación gráfica si ésta tiene un período de π, una amplitud de 2 y un desplazamiento de fase hacia la derecha de $\frac{\pi}{4}$

43. Para una persona en reposo, la velocidad v, en litros por segundo, de flujo de aire durante un ciclo respiratorio, está dado por

$$v(t) = 0.85\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

Donde t es el tiempo en segundos.

a. Encuentre el tiempo para un ciclo respiratorio.

b. Encuentre el número de veces que una persona respira por minuto.

c. Trace la gráfica de la función para un ciclo completo

44. La presión sanguínea para una persona sana en reposo, en milímetros de mercurio está dada por

$$P(t) = -20\cos\left(\frac{5\pi t}{2}\right) + 100$$

En donde el tiempo t está en segundos,

a. Encuentre el período de la función.

b. Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

c. Dibuje la gráfica de la función.

45. En un circuito de corriente alterna, la corriente I, en amperios, que fluye a través del mismo en el tiempo t, está dada por

$$I(t) = 220\,\mathrm{sen}\left(60\pi t - \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0$$

a. Calcule la amplitud, el período y el desplazamiento de fase.

b. Dibuje la gráfica de la función para 2 períodos completos.