6.1 Ángulos y arcos

OBJETIVOS

- Convertir ángulos expresados en grados minutos y segundos a su correspondiente forma decimal y viceversa.
- Convertir un ángulo expresado en grados a su correspondiente medida en radianes y viceversa.
- Calcular la medida de ángulos coterminales con un ángulo dado.
- Resolver problemas geométricos en donde se requiere el uso de las fórmulas de longitud de arco y área de un sector circular.

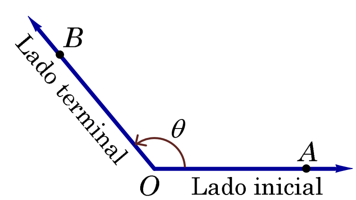
Ángulos

En Geometría un ángulo está formado por dos rayos que tienen un punto en común. En trigonometría y otros cursos de matemática, es conveniente definir un ángulo en términos de rotación.

Definición de ángulo

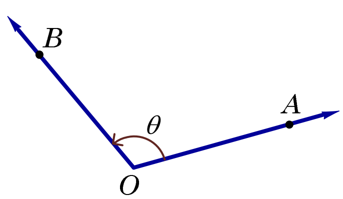
Un **ángulo** está formado por la rotación que se obtiene cuando un rayo gira desde una posición inicial hasta una posición terminal. La posición inicial del rayo se llama **lado inicial** del ángulo y la posición final del rayo es llamada **lado terminal** del ángulo. El punto de rotación se llama **vértice** del ángulo.

Hay varias maneras para referirse a un ángulo, algunas de ellas ya han sido estudiadas en la unidad de geometría. En trigonometría usualmente se utilizan letras griegas para identificar ángulos, como se muestra en la figura siguiente, en donde el ángulo se llama θ .

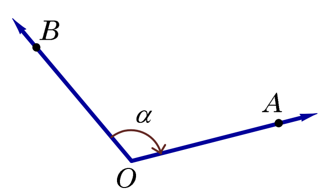


Angulo positivo y negativo

La medida de un ángulo es positiva si la rotación se produce en la dirección contraria al movimiento de las agujas de un reloj y un ángulo es negativo si la rotación se produce en la misma dirección en que se mueven las agujas de un reloj. La figura muestra un ángulo positivo θ y un ángulo negativo α



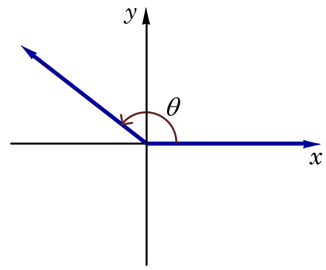
Ángulo positivo



Ángulo negativo

Ángulo en posición estándar

Un ángulo está en posición estándar si su vértice coincide con el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial está sobre el eje positivo de las x, como se muestra en la figura siguiente



Medición de ángulos en grados

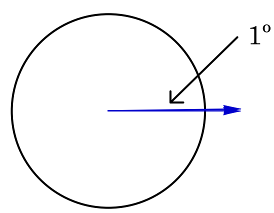
La medida de un ángulo está determinada por el tamaño de la rotación del lado inicial.

Uno de los sistemas utilizados para medir ángulos es el sexagesimal que proviene de la época de los babilonios y está basado en los 360 días.

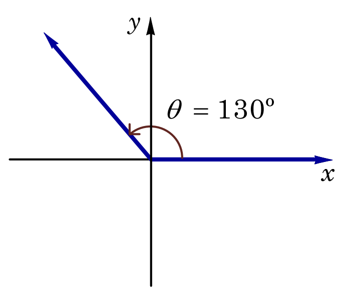
Definición de grado

Un grado es la medida de un ángulo formado por la rotación de un rayo $\frac{1}{360}$ partes de una revolución completa y se escribe como 1º.

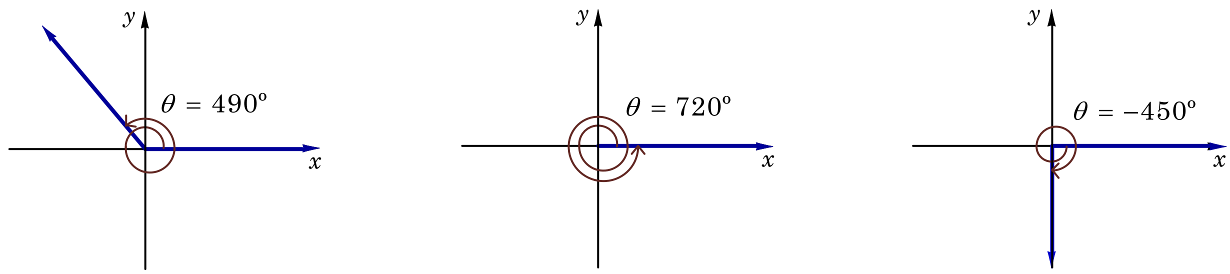
La figura que sigue muestra en forma aproximada un ángulo cuya medida es 1º



Por ejemplo, la siguiente figura muestra un ángulo en posición estándar cuya medida es $\theta = 130^\circ$



Algunos ángulos tienen medidas mayores de 360º o menores de – 360º ya que una rotación puede ser más grande de una revolución. La siguiente figura muestra tres ejemplos de ángulos grandes en posición estándar



Hay dos maneras de representar la parte fraccional de un grado. Una de ellas consiste en utilizar la parte decimar de un grado, por ejemplo el ángulo 35.43º tiene una medida de 35º más una parte fraccionaria $\frac{43}{100}$ de un grado.

Otra manera de representar la parte fraccionaria de un grado consiste en utilizar Minutos y Segundos, así un grado se divide en 60 minutos y 1 minuto se divide en 60 segundos.

$$1^{\circ} = 60', \qquad 1' = 60''$$

Aunque la mayor parte de calculadores científicas cuentan con funciones que permiten cambiar fácilmente un ángulo expresado en forma decimal a grados minutos y segundos y viceversa, en el siguiente ejemplo se ilustra cómo hacerlo manualmente

Ejemplo 1: conversión de minutos y segundos a forma decimal y viceversa

a. Exprese el ángulo 48.237º en grados minutos y segundos

b. Exprese el ángulo $73^{\circ}17'21''$ en forma decimal.

Solución

a. La conversión a minutos y segundos se puede hacer de la forma siguiente

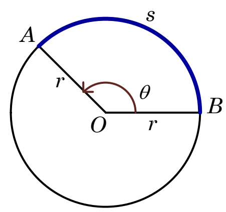
$$\begin{aligned} 48.237^{\circ} &= 48^{\circ} + 0.237^{\circ} \\ &= 48^{\circ} + 0.237^{\circ} \cdot \frac{60'}{1^{\circ}} \\ &= 48^{\circ} + 14.22' \\ &= 48^{\circ} + 14' + 0.22' \cdot \frac{60''}{1'} \\ &= 48^{\circ} + 14' + 13.2'' \\ &= 48^{\circ}14'13.2'' \end{aligned}$$

b. La conversión de grados minutos y segundos a forma decimal se hace en forma similar

$$\begin{aligned} 73^{\circ}17'21'' &= 73^{\circ} + 17' + 21'' \\ &= 73^{\circ} + 17' \cdot \frac{1^{\circ}}{60'} + 21'' \cdot \frac{1'}{60''} \cdot \frac{1^{\circ}}{60'} \\ &= 73^{\circ} + 0.2833^{\circ} + 0.005833^{\circ} \\ &= 73.2892^{\circ} \end{aligned}$$

Medición de ángulos en radianes

Otro método utilizado para medir ángulos es el **radian.** Para definir un radian primero considere una circunferencia de radio r y un ángulo central θ, como se muestra en la figura siguiente



Si la longitud s del arco $\widehat{AB}$, subtendida por el ángulo θ es igual a r, entonces la medida del ángulo θ es igual a 1 radian.

DEFINICIÓN DE RADIAN

Un radián es la medida del ángulo central subtendido por un arco de circunferencia de longitud r en una circunferencia de radio r.

Si un arco de circunferencia de radio r tiene una longitud s, entonces la medida en radianes del ángulo central θ subtendido por el arco es

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Por ejemplo si un arco tiene una longitud de 20 cm en un círculo de radio 8 cm, la medida en radianes del ángulo central es

$$\theta = \frac{s}{r}\,\text{radianes} = \frac{20\,\text{cm}}{8\,\text{cm}}\,\text{radianes} = \frac{5}{2}\,\text{radianes}$$

Observe que los centímetros se cancelan al dividir la longitud del arco entre el radio, por lo tanto la medida de un ángulo en radianes es un número **adimensional**, es decir que no hay una unidad de medida asociada con un radian.

Para establecer una relación entre un ángulo medido en grados y un ángulo medido en radianes recuerde que el perímetro de un círculo tiene una longitud $S = 2\pi r$, entonces la medida en radianes de del ángulo central formado por una circunferencia es

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes}$$

Como una circunferencia forma un ángulo de 360º, se obtiene las equivalencias

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

CONVERSIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

Para convertir un ángulo de radianes a grados, multiplique por $\left(\dfrac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right)$

Para convertir un ángulo de grados a radianes multiplique por $\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$

Ejemplo 2: conversión de grados a radianes y viceversa

a. Exprese el ángulo 300º en radianes.

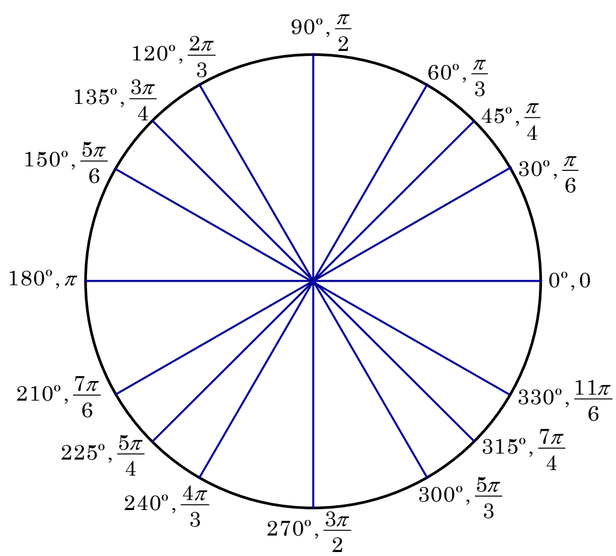
b. Exprese el ángulo $-\dfrac{7\pi}{4}$ en grados.

Solución

a. $300^\circ = 300^\circ\left(\dfrac{\pi}{180^\circ}\text{rad}\right) = \dfrac{5}{3}\pi \text{ rad} \approx 5.236\text{ rad}$

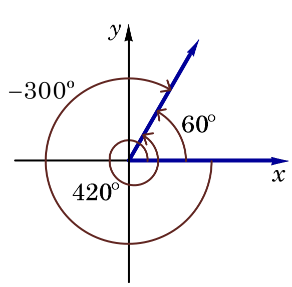
b. $-\dfrac{7\pi}{4}\text{ rad} = -\dfrac{7\pi}{4}\text{ rad}\left(\dfrac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right) = -315^\circ$

La siguiente figura muestra una circunferencia con los ángulos utilizados con mayor frecuencia expresados en grados y en radianes. Consulte ésta figura cuando resuelva los ejercicios propuestos.



Ángulos coterminales

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal, La figura siguiente muestra 3 ángulos coterminales con medidas de 60º, 420º y −300º.



En general, la expresión para calcular ángulos coterminales con un ángulo dado es la siguiente

MEDIDA DE ÁNGULOS COTERMINALES

Si θ es un ángulo en posición estándar medido en grados, entonces la medida de cualquier ángulo coterminal α está dada por

$$\alpha = \theta + k \cdot 360^{\circ}$$

Si θ está en radianes la medida de cualquier ángulo coterminal es

$$\alpha = \theta + k \cdot 2\pi^{\circ}$$

Donde k es un número entero.

Longitud de arco y área del sector circular

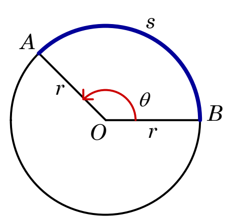
La longitud de un arco de circunferencia se obtiene fácilmente a partir de la definición de la fórmula para un ángulo expresado en radianes $\theta = \frac{s}{r}$.

FÓRMULA DE LONGITUD DE ARCO

Si r es el radio de una circunferencia y θ es la medida en radianes del ángulo central, entonces la longitud del arco subtendida por el ángulo central es

$$s = \theta r$$

En la figura se muestra un arco de longitud s



El área de un sector circular es una fracción $\frac{\theta}{2\pi}$ del área del círculo πr^2, donde el ángulo está expresado en radianes, es decir que el área del sector circular es proporcional a la medida del ángulo central

$$A = \frac{\theta}{2\pi}\left(\pi r^2\right) = \frac{1}{2}r^2\theta$$

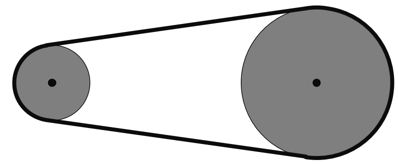
ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

El área de un sector circular con radio r y donde θ es la medida en radianes del ángulo central, es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Ejemplo 3: Relación de giros entre poleas

La figura muestra dos poleas de radios 2 cm y 4 cm respectivamente. Si la polea mayor gira un ángulo de 360º. Calcule el ángulo girado por la polea pequeña si no hay deslizamiento.



Solución

Si no hay deslizamiento, la longitud del arco que se desplaza la faja en la polea mayor es igual a la longitud del arco en la polea menor.

Como $360^\circ = 2\pi$ rad, en la polea mayor la longitud del arco girado es

$$s = \theta r = (2\pi)(4) = 8\pi$$

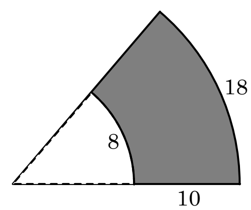
En la polea menor el ángulo girado es

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi$$

Es decir que la polea pequeña da dos vueltas por cada vuelta que da la polea mayor.

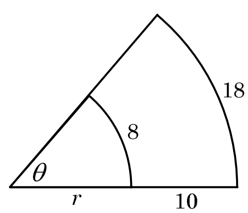
Ejemplo 4: Área entre dos sectores circulares

La figura muestra un rectángulo polar, el cual está formado por dos arcos de círculos concéntricos de longitudes 8 cm y 18 cm y lados de 10 cm. Calcule él área sombreada.



Solución

Sea r el radio del sector cuya longitud de arco es 8 cm y sea θ el ángulo central, como se indica en la figura siguiente



La longitud del arco en el sector pequeño es

$$8 = \theta r$$

Mientras que en el sector grande la longitud del arco es

$$18 = \theta(r + 10)$$

Despejando θ en ambas ecuaciones e igualando

$$\frac{8}{r} = \frac{18}{r + 10}$$

Despejando r

$$8(r+10)=18r$$
$$8r+80=18r$$
$$10r=80$$
$$r=8$$

La medida del ángulo central es

$$\theta=\frac{8}{r}=\frac{8}{8}=1\text{ rad}$$

El área sombreada es la diferencia de las áreas de los sectores

$$\begin{aligned}A_s&=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}r^2\theta\\&=\frac{1}{2}(18)^2(1)-\frac{1}{2}(8)^2(1)\\&=130\text{ cm}^2\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 6.1

En los ejercicios 1 a 8 dibuje el ángulo dado en posición estándar

1. 140° **2.** -330°

3. -450° **4.** 1140°

5. $\frac{7\pi}{3}$ **6.** $\frac{7\pi}{3}$

7. $-\frac{3\pi}{2}$ **8.** 5π

En los ejercicios 9 a12 exprese el ángulo dado en forma decimal

9. $-25^\circ 12'$ **10.** $148^\circ 7' 30''$

11. $-328^\circ 15' 40''$ **12.** $420^\circ 17' 31''$

En los ejercicios 13 a 16 exprese en ángulo dado en términos de grados minutos y segundos

13. 210.78° **14.** -20.45°

15. 330.125 **16.** -430.667

En los ejercicios 17 a 22, convierta el ángulo de grados a radianes. Exprese la respuesta en términos de π

17. 270° **18.** $120^\circ 40'$

19. -52° **20.** 540°

21. -230° **22.** -100°

En los ejercicios 23 a 28, convierta el ángulo de radianes a grados.

23. $\frac{\pi}{5}$ **24.** $-\frac{3\pi}{8}$

25. $\frac{11\pi}{18}$ **26.** 4π

27. $-\frac{11\pi}{3}$ **28.** $\frac{6\pi}{5}$

En los ejercicios 29 a 34 dibuje el ángulo dado en posición estándar y encuentre un ángulo α que sea coterminal con el ángulo dado tal que $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$

29. -90° **30.** 400°

31. 720° **32.** 1250°

33. -120° **34.** -540°

En los ejercicios 35 a 40 encuentre un ángulo θ que sea coterminal con el ángulo dado en radianes, $0 \le \theta \le 2\pi$

35. $\frac{12\pi}{5}$ **36.** $-\frac{7\pi}{3}$

37. $\frac{17\pi}{6}$ **38.** $-\frac{\pi}{4}$

39. $-\frac{11\pi}{3}$ **40.** $\frac{32\pi}{3}$

41. Calcule la longitud de un arco en un círculo de 10 cm de diámetro y un ángulo central de 40°.

42. Un arco de 40 cm subtiende un ángulo central θ en un círculo de 8 cm de radio. Calcule la medida del ángulo central.

43. Encuentre el radio de un círculo si un arco de 12 cm de longitud subtiende un ángulo central de $\pi/3$.

44. En un círculo de radio 6 cm un ángulo central subtiende un arco de 50 cm. Calcule el área del sector circular formado por el mismo ángulo central.

45. La rueda de un auto tiene un diámetro de 24 pulgadas. Determine cuántas revoluciones debe dar la rueda para que el auto recorra una distancia de 5 km.

46. La rueda delantera de un triciclo tiene un diámetro de 20 pulgadas. ¿Qué distancia recorrerá un niño si pedalea 60 revoluciones?

47. Suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es una circunferencia con radio de 150 millones de kilómetros y que la tierra tarda 365 días en completar una órbita. Calcula la distancia recorrida por la tierra en 1 hora.

48. Si la tierra tiene un radio de 3,960 millas y la tierra da una vuelta sobre su eje en 24 horas. Calcula la distancia recorrida por un punto sobre en un tiempo de 30 minutos, debido a la rotación de la tierra.

49. La rueda estrella delantera de una bicicleta tiene un radio de 12 cm y la estrella trasera tiene un diámetro de 3 cm. Si las llantas tienen un radio de 40 cm. Calcule la distancia recorrida si un ciclista pedalea sin parar 50 revoluciones.

50. El ángulo subtendido por el sol visto desde la tierra a 93 millones de millas de distancia es de 0.093 radianes. Encuentre el diámetro del sol.

51. Un reloj tiene las agujas de minutos y horas del 6 pulgadas de largo. Encuentre el área del sector que forman cuando son las 5:40.