PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule el límite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x}$$

Solución

Al calcular el límite del numerador y del denominador se obtiene

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{4x^2+9}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2-5x\right) = 2-(-\infty) = +\infty$$

Como el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{-\infty}{+\infty}$ hay que multiplicar el numerador y el denominador por un factor de la forma $\frac{1}{x^n}$, en donde n es la potencia mas grande que tenga la variable x en el denominador

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{4x^2+9}}{x}}{\frac{2}{x}-\frac{5x}{x}}\end{aligned}$$

Observe que ahora se tiene un problema con la variable x que aparece por debajo del radical. Para poder aplicar los teoremas de límites al infinito es necesario introducir x dentro del radical, para ello es fundamental tomar en cuenta la siguiente propiedad, ya que de otra forma el resultado que se obtendrá será incorrecto

$$x = \begin{cases} \sqrt{x^2} & si \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{x^2} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Como en este problema $x \to -\infty$, debemos reemplazar $x = -\sqrt{x^2}$. Realizando la sustitución y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{\sqrt{4x^2+9}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{2}{x}-5}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{\sqrt{4x^2+9}}{-\sqrt{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-5}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{\dfrac{4x^2+9}{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-5}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{4+\dfrac{9}{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-5}$$

Utilizando las leyes para calcular límites al infinito se obtiene que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+9}}{2-5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{4+\dfrac{9}{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-5}$$

$$=\frac{1+\sqrt{4+0}}{0-5}$$

$$=-\frac{3}{5}$$