PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule la integral impropia

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$$

Solución

La función que se va a integrar no está definida en 0, entonces

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$$

Como primer paso se debe calcular la integral indefinida.

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$$

Utilizando integración por partes

$$u = \frac{1}{x} \qquad dv = \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$$

$$du = -\frac{1}{x^2} \qquad v = \int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int e^{1/x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -e^{1/x}$$

Al integrar por partes se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx &= \frac{1}{x}\cdot\left(-e^{1/x}\right) - \int\left(-e^{1/x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= -\frac{e^{1/x}}{x} + \int\left(e^{1/x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= -\frac{e^{1/x}}{x} + e^{1/x} \\
&= e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar la integral desde -1 hasta t

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{t} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx &= \left[e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]_{-1}^{t} \\
&= e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right) - e^{1/-1}\left(1-\frac{1}{-1}\right) \\
&= e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right) - e^{-1}(2) \\
&= e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right) - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Finalmente se evalúa el límite

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx &= \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx\\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)-\frac{2}{e}\right]\\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]-\lim_{t\to 0^-}\left[\frac{2}{e}\right]\\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]-\frac{2}{e}\end{aligned}$$

Para calcular el límite que hace falta se utilizará la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]$$

Este límite tiene forma $0\cdot\infty$ ya que

$$e^{1/0^-}\to e^{-\infty}\to\frac{1}{e^{\infty}}\to 0$$

$$1-\frac{1}{0^-}\to 1-(-\infty)\to\infty$$

Para que se pueda utilizar la regla de L'hospital el límite se expresa como

$$\lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]=\lim_{t\to 0^-}\frac{1-\frac{1}{t}}{e^{-1/t}}$$

Que tiene forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right] &= \lim_{t\to 0^-}\frac{1-\frac{1}{t}}{e^{-1/t}}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{\frac{1}{t^2}}{e^{-1/t}\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{1}{e^{-1/t}}=\frac{1}{e^{-1/0^-}}=\frac{1}{e^{\infty}}\\ &= \frac{1}{\infty}\\ &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de límite se tiene que la integral impropia es

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx &= \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx\\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]-\frac{2}{e}\\ &= 0-\frac{2}{e}\\ &= -\frac{2}{e}\end{aligned}$$