PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule la integral impropia

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta d\theta$$

Solución

Observe que la función $\tan\theta$ no está definida para $\theta = \frac{\pi}{2}$ ya que la función tangente tiende al infinito cuando θ tiende a $\frac{\pi}{2}$, razón por la cual la integral es impropia y se calcula de la forma siguiente

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta d\theta = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan^2\theta\, d\theta$$

Como primer paso se debe calcular la integral indefinida.

$$\int \tan^2\theta d\theta$$

Utilizando la sustitución $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$$\begin{aligned}\int \tan^2\theta d\theta &= \int (\sec^2\theta - 1)d\theta \\ &= \tan\theta - \theta + c\end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar la integral desde 0 hasta t

$$\begin{aligned}\int_0^t \tan^2\theta\, d\theta &= [\tan\theta - \theta]_0^t \\ &= (\tan t - t) - (\tan 0 - 0) \\ &= \tan t - t\end{aligned}$$

Finalmente se evalúa el límite

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta d\theta &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan^2\theta\, d\theta \\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan t - t) \\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan t) - \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (t) \\ &= +\infty - \frac{\pi}{2} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Entonces la integral $\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta d\theta$ es divergente