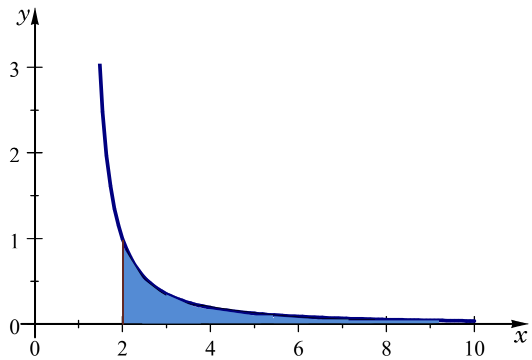
PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica de la función, así como el área bajo la curva correspondiente a la integral definida



Observe que la función no está definida en $x = 1$, pero esté valor está fuera del intervalo de integración $[2, +\infty)$. La integral es impropia pues la función no está definida en el límite superior de integración, entonces

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$

Primero se debe calcular la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$

La integral se calcula fácilmente haciendo la sustitución

$$u = x - 1$$

$$du = dx$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} &= \int \frac{du}{(u)^{3/2}} \\ &= \int u^{-3/2} du \\ &= \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-2}{(x-1)^{1/2}} \end{aligned}$$

Ahora se puede calcular la integral impropia

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} &= \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-2}{(x-1)^{1/2}} \right]_2^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-2}{(t-1)^{1/2}} - \frac{-2}{(2-1)^{1/2}} \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-2}{(t-1)^{1/2}} \right) - \lim_{t\to\infty} (-2) \\
&= 0 + 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$