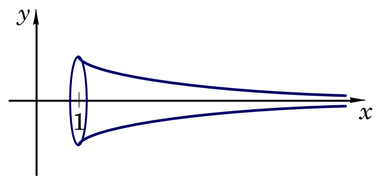
PROBLEMA RESUELTO 2

La curva $y = \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$; se hace girar alrededor del eje x. Determine el área de la superficie de revolución resultante si éste existe.

Solución

La figura siguiente muestra la curva y la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje x.



La superficie de revolución está dada por

$$S = \int_1^{\infty} (2\pi r) ds$$

Como el eje de rotación es el eje x, se tiene que

$$r = y = \frac{1}{x}$$

El diferencial de longitud ds es

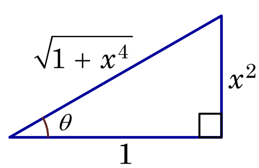
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}}\, dx = \frac{1}{x^2}\sqrt{x^4 + 1}\, dx$$

Entonces la superficie de revolución está dada por

$$S = \int_1^{\infty} (2\pi r) ds = \int_1^{\infty} \left(2\pi \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + x^4}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^3}\right) dx$$

Ahora se procede a calcular la integral indefinida, para la cual es necesario utilizar una sustitución trigonométrica



$$\tan\theta = \frac{x^2}{1} \quad \text{entonces} \quad \begin{aligned} x^2 &= \tan\theta \\ 2x dx &= \sec^2\theta\, d\theta \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^4}(2xdx) = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\sec^2\theta}}{\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta\cdot\sec^2\theta}{\tan^2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta(1+\tan^2\theta)}{\tan^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta$$
$$= -\frac{1}{2\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|$$
$$= -\frac{1}{2}\csc\theta + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|$$

Finalmente hay que expresar la integral en términos de x

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}}{1} + x^2\right|$$
$$= -\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{1+x^4}\right|$$

Una vez calculada la integral indefinida, se puede calcular la integral impropia, para obtener la superficie de revolución, siempre y cuando la integral converja

$$S = 2\pi\int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}\right)dx = 2\pi\lim_{t\to\infty}\left[\int_1^t \left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}\right)dx\right]$$
$$= 2\pi\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{1+x^4}\right|\right]_1^t$$
$$= 2\pi\lim_{t\to\infty}\left[\left(-\frac{\sqrt{1+t^4}}{2t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + \sqrt{1+t^4}\right|\right) - \left(-\frac{\sqrt{1+1^4}}{2(1)} + \frac{1}{2}\ln\left|1^2 + \sqrt{1+1^4}\right|\right)\right]$$
$$= 2\pi\left[\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{1+t^4}}{2t^2}\right) + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(t^2 + \sqrt{1+t^4}\right)\right] + \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2} - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right)\right]$$
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2} + \infty + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right)$$
$$= \infty$$

Como el segundo límite es infinito, la integral es divergente y la superficie de revolución es infinita.