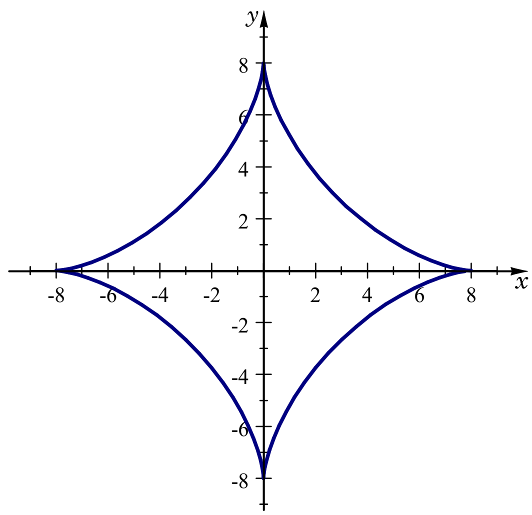
PROBLEMA RESUELTO 2

Encuentre la longitud total de la gráfica del astroide cuya ecuación es

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$$

Solución

Al utilizar un programa de cómputo se dibuja la gráfica del astroide se obtiene la figura siguiente



Como se observa, la gráfica es simétrica respecto a ambos ejes, por lo que para calcular la longitud total de la curva, será suficiente con calcular la longitud de la curva en el primer cuadrante y multiplicar el resultado por 4, es decir

$$L = 4\int_a^b ds = 4\int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Despejando y en la ecuación dada.

$$\begin{aligned} x^{2/3} + y^{2/3} &= 4 \\ y^{2/3} &= 4 - x^{2/3} \\ y &= \left(4 - x^{2/3}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

Calculando la primera derivada se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(4 - x^{2/3}\right)^{3/2} = \frac{3}{2}\left(4 - x^{2/3}\right)^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\frac{\left(4 - x^{2/3}\right)^{1/2}}{x^{1/3}}$$

Sustituyendo la derivada en la fórmula de la longitud de arco y desarrollando las operaciones resultantes se obtiene

$$L = 4\int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 4\int_0^8 \sqrt{1 + \left(-\frac{\left(4 - x^{2/3}\right)^{1/2}}{x^{1/3}}\right)^2}\, dx$$

$$\begin{aligned}
L &= 4\int_0^8 \sqrt{1+\left(-\frac{\left(4-x^{2/3}\right)^{1/2}}{x^{1/3}}\right)^2}\,dx \\
&= 4\int_0^8 \sqrt{1+\frac{\left(4-x^{2/3}\right)}{x^{2/3}}}\,dx \\
&= 4\int_0^8 \sqrt{\frac{x^{2/3}+4-x^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx \\
&= 4\int_0^8 \sqrt{\frac{4}{x^{2/3}}}\,dx \\
&= 4\int_0^8 \frac{2}{x^{1/3}}\,dx \\
&= 8\left[\frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right]_0^8 \\
&= 12(8)^{2/3} - 12(0)^{2/3} \\
&= 48
\end{aligned}$$