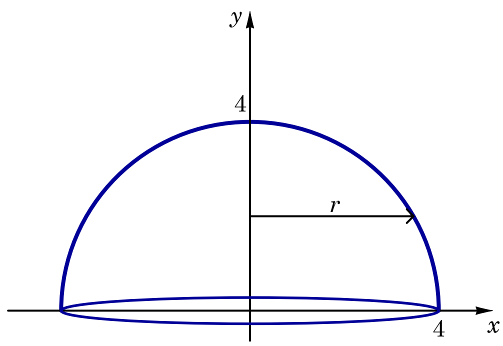
PROBLEMA RESUELTO 1

Obtenga el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la curva $y = \sqrt{16 - x^2}$ en el intervalo $[0,4]$, alrededor del eje y

Solución

La figura siguiente muestra la curva y la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje y. Es claro que la región obtenida es una semiesfera de radio 4



La superficie de revolución está dada por

$$S = \int_a^b (2\pi r)\,ds$$

Como el eje de rotación es el eje y se tiene que

$$r = x$$

Calculando la derivada de la función

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{16 - x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(16 - x^2\right)^{-1/2}(-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

El diferencial de longitud ds es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2}}\,dx = \sqrt{\frac{16 - x^2 + x^2}{16 - x^2}}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{16}{16 - x^2}}\,dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Entonces la superficie de revolución está dada por

$$S = \int_a^b (2\pi r)\,ds = \int_0^4 (2\pi x)\frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$$

$$= 8\pi\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$$

Ahora se procede a calcular la integral indefinida por medio de una sustitución

$$u = 16 - x^2$$

$$du = -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}du = x\,dx$$

Realizando la sustitución

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right) = -u^{1/2}$$

$$= -\sqrt{16 - x^2}$$

Evaluando la integral

$$S = 8\pi\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$$

$$= 8\pi\left[-\sqrt{16 - x^2}\right]_0^4$$

$$= 8\pi\left[-\sqrt{16 - 4^2}\right] - 8\pi\left[-\sqrt{16 - 0^2}\right]$$

$$= 8\pi(0) + 8\pi(4)$$

$$= 32\pi$$