PROBLEMA RESUELTO 1

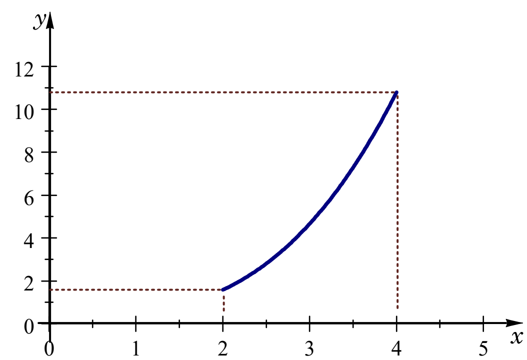
Calcule la longitud de arco de la curva

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$$

En el intervalo $[2,4]$

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $[2,4]$



La longitud de arco de la curva está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Calculando la primera derivada de la función se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral y simplificando se tiene

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right]^2}\,dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{4x^4}\right)}\,dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}\right)}\,dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}}\,dx \end{aligned}$$

Observe que la expresión dentro del radical es muy parecida a la expresión dentro del paréntesis en la línea superior, con la única diferencia que el número $\frac{1}{2}$ está sumando y no restando; por lo tanto, se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto, solo que ahora con signo positivo

$$
\begin{aligned}
L &= \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)dx \\
&= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-2}\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x}\right]_2^4 \\
&= \left(\frac{1}{6}(4)^3 - \frac{1}{2(4)}\right) - \left(\frac{1}{6}(2)^3 - \frac{1}{2(2)}\right) \\
&= \left(\frac{253}{24}\right) - \left(\frac{13}{12}\right) \\
&= \frac{227}{24}
\end{aligned}
$$