PROBLEMA RESUELTO 6

Calcule la integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}}\,dx$$

Solución

Como la expresión dentro del radical tiene un polinomio cuadrático, lo primero que hay que hacer es completar el cuadrado

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x - 8 &= 4(x^2 + x) - 8 \\ &= 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 8 - 1 \\ &= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9 \end{aligned}$$

Entonces la integral inicial puede expresarse como

$$\int \frac{x}{\sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}}\,dx$$

Al hacer una sustitución inicial

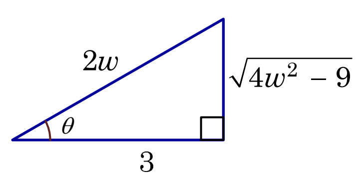
$$w = x + \frac{1}{2}$$

$$dw = dx$$

La integral queda expresada en términos de w como

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}}\,dx &= \int \frac{w - \frac{1}{2}}{\sqrt{4w^2 - 9}}\,dw \\ &= \int \frac{w - \frac{1}{2}}{\sqrt{(2w)^2 - 9}}\,dw \end{aligned}$$

La integral tiene una expresión de la forma $u^2 - a^2$ donde $a = 3$ y $u = 2w$. En este caso $2w$ se coloca en la hipotenusa 3 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a\sec\theta$. El cateto opuesto se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\sec\theta = \frac{2w}{3}$$

$$3\sec\theta = 2w$$

$$dw = \frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

Al sustituir w y dw para obtener una integral con funciones trigonométricas

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \int \frac{w-\frac{1}{2}}{\sqrt{(2w)^2-9}}dw = \int \frac{\frac{3}{2}\sec\theta-\frac{1}{2}}{\sqrt{(3\sec\theta)^2-9}}\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{3\sec\theta-1}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\int \frac{3\sec\theta-1}{\sqrt{9(\sec^2\theta-1)}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{3\sec\theta-1}{3\sqrt{\tan^2\theta-1}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{3\sec\theta-1}{\tan\theta}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

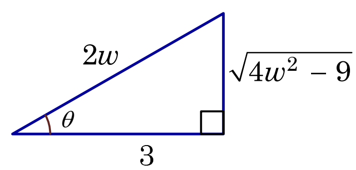
$$= \frac{1}{4}\int (3\sec\theta-1)\sec\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta - \frac{1}{4}\int \sec\theta\, d\theta$$

Las dos integrales resultantes se calculan utilizando las fórmulas de integración correspondientes

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \frac{3}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta - \frac{1}{4}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\tan\theta - \frac{1}{4}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

Utilizando el triángulo rectángulo para obtener las funciones trigonométricas en términos de w



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{4w^2-9}}{3}, \qquad \sec\theta = \frac{2w}{3}$$

La integral queda expresada en términos de w como

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{4w^2-9}}{3} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2w}{3}+\frac{\sqrt{4w^2-9}}{3}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{4w^2-9}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2w+\sqrt{4w^2-9}}{3}\right| + c$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x. Como $w = x + \frac{1}{2}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \frac{\sqrt{4w^2-9}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2w+\sqrt{4w^2-9}}{3}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-9}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-9}}{3}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2+4x-8}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1+\sqrt{4x^2+4x-8}}{3}\right| + c$$