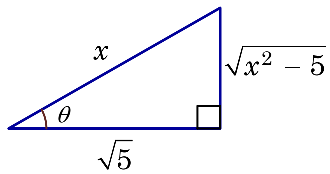
PROBLEMA RESUELTO 5

Calcule la integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}\,dx$$

Solución

La integral tiene una expresión de la forma $u^2 - a^2$ donde $a = \sqrt{5}$ y $u = x$. En este caso x se coloca en la hipotenusa $\sqrt{5}$ en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a\sec\theta$. El cateto opuesto se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$x = \sqrt{5}\sec\theta$$

$$dx = \sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

Al sustituir x y dx para obtener una integral con funciones trigonométricas

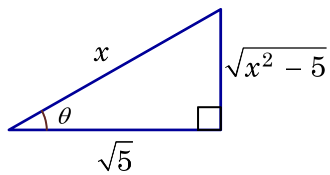
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}\,dx &= \int \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\sec\theta\right)^2-5}}{\left(\sqrt{5}\sec\theta\right)^2}\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \sqrt{5}\int \frac{\sqrt{5\sec^2\theta-5}}{5\sec^2\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sqrt{5(\sec^2\theta-1)}}{\sec\theta}\tan\theta\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sqrt{5\tan^2\theta}}{\sec\theta}\tan\theta\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sqrt{5}\tan\theta}{\sec\theta}\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula utilizando la identidad trigonométrica

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}\,dx &= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta - \int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta - \int \cos\theta\,d\theta \\
&= \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| - \operatorname{sen}\theta + c
\end{aligned}
$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x, para ello nos apoyamos nuevamente en el triángulo rectángulo



$$
\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}\,dx &= \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| - \operatorname{sen}\theta + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{5}}{x} + \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right| - \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} + c
\end{aligned}
$$