

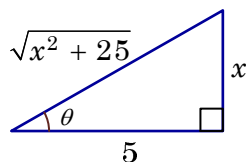
PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule la integral

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx$$

Solución

La integral tiene una expresión de la forma $a^2 + u^2$ donde $a = 5$ y $u = x$. En este caso x se coloca en el cateto opuesto del triángulo y 5 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a \tan \theta$. La hipotenusa se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\tan \theta = \frac{x}{5}$$

$$x = 5 \tan \theta$$

$$dx = 5 \sec^2 \theta d\theta$$

Observe que

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5}, \text{ entonces } \sqrt{x^2 + 25} = 5 \sec \theta$$

Sustituyendo x , $\sqrt{x^2 + 25}$ y dx se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= \int \frac{(5 \tan \theta)^3 (5 \sec^2 \theta d\theta)}{5 \sec \theta} \\ &= 125 \int \frac{\tan^3 \theta \sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta \\ &= 125 \int \tan^3 \theta \sec \theta d\theta \end{aligned}$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula haciendo la sustitución

$$u = \sec \theta$$

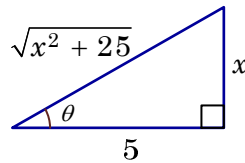
$$du = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= 125 \int \tan^3 \theta \sec \theta d\theta \\
&= 125 \int \tan^2 \theta \tan \theta \sec \theta d\theta \\
&= 125 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta \tan \theta d\theta \\
&= 125 \int (u^2 - 1) du \\
\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= 125 \int (u^2 - 1) du \\
&= 125 \left(\frac{1}{3} u^3 - u \right) + c
\end{aligned}$$

Expresando la respuesta en términos de funciones trigonométricas con $u = \sec \theta$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx = 125 \left(\frac{1}{3} \sec^3 \theta - \sec \theta \right) + c$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x , para ello nos apoyamos nuevamente en el triángulo rectángulo



$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= 125 \left(\frac{1}{3} \sec^3 \theta - \sec \theta \right) + c \\
&= \frac{125}{3} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5} \right)^3 - 125 \left(\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5} \right) + c \\
&= \frac{1}{3} (x^2 + 25)^{3/2} - 25 \sqrt{x^2 + 25} + c
\end{aligned}$$
