PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule la integral

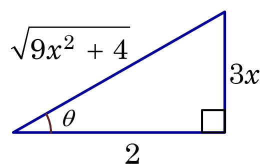
$$\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^2}$$

Solución

La integral puede expresarse como

$$\int \frac{dx}{\left[(3x)^2 + 4\right]^2}$$

La integral tiene una expresión de la forma $a^2 + u^2$ donde $a = 2$ y $u = 3x$. En este caso $3x$ se coloca en el cateto opuesto del triángulo y 2 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a\tan\theta$. La hipotenusa se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\tan\theta = \frac{3x}{2}$$

$$2\tan\theta = 3x$$

$$x = \frac{2}{3}\tan\theta$$

$$dx = \frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

Sustituyendo x y dx y simplificando la integral resultante

$$\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^2} = \int \frac{\frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\left(9\left(\frac{2}{3}\tan\theta\right)^2 + 4\right)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(9\left(\frac{4}{9}\tan^2\theta\right) + 4\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(4\tan^2\theta + 4\right)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{16\left(\tan^2\theta + 1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{24}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\sec^2\theta\right)^2} = \frac{1}{24}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\, d\theta$$

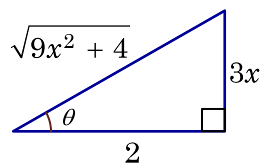
$$= \frac{1}{24}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula fácilmente

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(9x^2+4)^2} &= \frac{1}{24}\int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{24}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, d\theta \\
&= \frac{1}{48}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) + c \\
&= \frac{1}{48}\theta + \frac{1}{96}\operatorname{sen} 2\theta + c \\
&= \frac{1}{48}\theta + \frac{1}{96}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c \\
&= \frac{1}{48}\theta + \frac{1}{48}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c
\end{aligned}$$

Del triángulo rectángulo se tiene que



$$\tan\theta = \frac{3x}{2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3x}{\sqrt{9x^2+4}}, \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{9x^2+4}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(9x^2+4)^2} &= \frac{1}{48}\theta + \frac{1}{48}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c \\
&= \frac{1}{48}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{48}\cdot\frac{3x}{\sqrt{9x^2+4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{9x^2+4}} + c \\
&= \frac{1}{48}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{48}\cdot\frac{6x}{9x^2+4} + c \\
&= \frac{1}{48}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{x}{8(9x^2+4)} + c
\end{aligned}$$