PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule la integral

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

Solución

Esta integral se debe calcular utilizando fracciones parciales. Como el grado del numerador es igual que el grado del denominador, lo primero que se debe hacer es la división de polinomios

Al desarrollar productos en el denominador se tiene

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x^2+1) &= (x^2 - 2x + 1)(x^2+1)\\ &= x^4 + x^2 - 2x^3 - 2x + x^2 + 1\\ &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\end{aligned}$$

Ahora se procede a realizar la división de polinomios para obtener el cociente y el residuo. El resultado de la división es el siguiente

$$\begin{aligned}\frac{x^4 + 3x^2 - 4x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= 1 + \frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\\ &= 1 + \frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

Ahora se procede a descomponer en fracciones parciales la fracción propia resultante. Observe que uno de los factores es lineal repetido mientras que el otro es un factor cuadrático irreducible

$$\frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

Simplificando la suma de fracciones en el lado derecho y agrupando los términos que tienen la variable con el mismo exponente

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx + D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\\ &= \frac{A(x^3 - x^2 + x - 1) + Bx^2 + B + (Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2xD + D)}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}\\ &= \frac{Ax^3 - Ax^2 + Ax - A + Bx^2 + B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2xD + D}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}\\ &= \frac{(A + C)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 + (A + C - 2D)x + (-A + B + D)}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores de las fracciones se tiene

$$2x^3 + x^2 - 2x + 3 = (A + C)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 + (A - 2D + C)x + (-A + B + D)$$

Como los polinomios son iguales, los coeficientes de potencias iguales tienen que ser iguales. Al igualar los coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$A + C = 2$$

$$-A + B - 2C + D = 1$$

$$A + C - 2D = -2$$

$$-A + B + D = 3$$

Al resolver por sustituciones el sistema de ecuaciones se obtiene

$$A + C - 2D = -2$$

$$2 - 2D = -2$$

$$-2D = -4$$

$$D = 2$$

Como $D = 2$

$$-A + B + D = 3$$

$$-A + B = 3 - D$$

$$-A + B = 3 - 2$$

$$-A + B = 1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$-A + B - 2C + D = 1$$

$$1 - 2C + D = 1$$

$$-2C = -D$$

$$-2C = -2$$

$$C = 1$$

Calculando A

$$A + C = 2$$

$$A = 2 - C = 2 - 1$$

$$A = 1$$

Solamente hace falta calcular B

$$-A + B + D = 3$$

$$B = 3 - D + A = 3 - 2 + 1$$

$$B = 2$$

La descomposición en fracciones parciales es la siguiente

$$\frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{\left(x^2 + 1\right)\left(x - 1\right)^2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

Ahora se puede calcular la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+3x^2-4x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx &= \int\left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{x+2}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int dx+\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{2}{(x-1)^2}dx+\int\frac{x+2}{x^2+1}dx \\ &= x+\ln(x-1)+\int 2(x-1)^{-2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{2}{x^2+1}dx \\ &= x+\ln(x-1)+\frac{2(x-1)^{-1}}{-1}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\tan^{-1}x+c \\ &= x+\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\tan^{-1}x+c\end{aligned}$$