PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule la integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx$$

Solución

Para calcular esta integral primero se debe completar cuadrados en la expresión dentro del radical y luego utilizar sustitución trigonométrica.

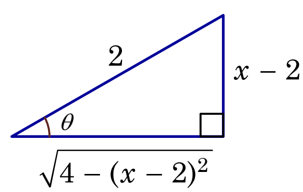
Completando cuadrados se tiene:

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 \\ &= -(x-2)^2 + 4 \\ &= 4 - (x-2)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}\,dx$$

Ahora por sustitución trigonométrica, se tiene una expresión de la forma $a^2 - u^2$ donde $a = 2$ y $u = x - 2$. El dos se coloca en la hipotenusa del triángulo y $x - 2$ en el cateto opuesto. El cateto adyacente se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{x-2}{2} \\ 2\operatorname{sen}\theta &= x - 2 \\ x &= 2\operatorname{sen}\theta + 2 \end{aligned}$$

Calculando el diferencial

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

En este punto del problema ya se puede sustituir x y dx para expresar la integral én términos de funciones trigonométricas como en el ejemplo 1.

Aquí ilustraremos otra forma de hacerlo. Del triángulo rectángulo se tiene que

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\sqrt{4 - (x-2)^2}}{2} \\ 2\cos\theta &= \sqrt{4 - (x-2)^2} \end{aligned}$$

Es decir que podemos sustituir directamente $2\cos\theta$, por la expresión en el denominador de la integral. Haciendo las sustituciones se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= \int \frac{(2\operatorname{sen}\theta+2)^2}{2\cos\theta}2\cos\theta d\theta \\
&= \int (4\operatorname{sen}^2\theta + 8\operatorname{sen}\theta + 4)d\theta \\
&= 4\int \operatorname{sen}^2\theta + 8\int \operatorname{sen}\theta d\theta + 4\int d\theta \\
&= 4\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta + 8\int \operatorname{sen}\theta d\theta + 4\int d\theta \\
&= 2\int d\theta - 2\int \cos 2\theta d\theta + 8\int \operatorname{sen}\theta d\theta + 4\int d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= 2\theta - 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta - 8\cos\theta + 4\theta + c \\
&= 6\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 8\cos\theta + c
\end{aligned}$$

Del triángulo rectángulo se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{2} \quad \text{entonces} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

También

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= 6\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 8\cos\theta + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}\right) - 8\left(\frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}\right) + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} - 4\sqrt{4-(x-2)^2} + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-(x-2)^2} + \sqrt{4-(x-2)^2} - 4\sqrt{4-(x-2)^2} + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-(x-2)^2} - 3\sqrt{4-(x-2)^2} + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4x-x^2} - 3\sqrt{4x-x^2} + c
\end{aligned}$$