PROBLEMA RESUELTO 2

Dada la integral

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx$$

a. Use la integración numérica de la computadora para obtener un valor de I.

b. Use el método del punto medio con $n = 10$, para aproximar I.

c. Emplee el método de Simpson con $n = 10$ para aproximar el valor de I.

d. Calcule el error exacto en la regla del punto medio y la regla de Simpson, suponiendo que el resultado del inciso (a) es exacto.

e. Utilice una gráfica para obtener una buena cota superior de $\left|f^{(2)}(x)\right|$.

f. Utilice el resultado del inciso anterior para estimar el error al utilizar la regla del punto medio. Compare el error estimado con el error exacto.

g. Obtenga una buena cota superior de $\left|f^{(4)}(x)\right|$ mediante una gráfica.

h. Utilice el resultado del inciso anterior para estimar el error al utilizar la regla de Simpson. Compare el error estimado con el error exacto.

i. ¿Cuánto debe valer n a fin de garantizar que la magnitud del error cometido al emplear el método de Simpson sea menor que 0.0001?

Solución

a. Al calcular la integral utilizando un programa de cómputo se obtiene el siguiente resultado, que asumiremos que es el valor exacto con siete cifras decimales.

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx = 7.9549265$$

b. Por el método del punto medio para aproximar la integral tenemos

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx = \Delta x\left[f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + f(\overline{x}_3) + \cdots + f(\overline{x}_n)\right]$$

donde $n = 10$, $\qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{5}$

Como los valores de $\overline{x}$ a evaluar se localizan en el punto medio de cada intervalo se obtiene

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{\frac{\pi}{5} - 0}{2} = \frac{\pi}{10}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\pi}{10} + \Delta x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

$$\overline{x}_3 = \frac{\pi}{10} + 2\Delta x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{10}$$

y así sucesivamente. Usando el programa para evaluar la suma tenemos.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \approx \frac{\pi}{5}\left[f\left(\frac{\pi}{10}\right)+f\left(\frac{3\pi}{10}\right)+f\left(\frac{5\pi}{10}\right)+f\left(\frac{7\pi}{10}\right)+f\left(\frac{9\pi}{10}\right)+f\left(\frac{11\pi}{10}\right)+f\left(\frac{13\pi}{10}\right)+f\left(\frac{15\pi}{10}\right)+\right.$$
$$\left. f\left(\frac{17\pi}{10}\right)+f\left(\frac{19\pi}{10}\right)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\,dx \approx \frac{\pi}{5}[2.5884+1.7999+1.0+0.5555+0.3863+0.3863+0.5555$$
$$+1.0+1.7999+2.5884]$$
$$\approx 7.95464$$

c. Calculemos la integral utilizando el método de Simpson con $n = 10$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\,dx = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

donde $n = 10$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{5}$

$$x_0 = a = 0$$
$$x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$
$$x_2 = a + 2\Delta x = 0 + \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$
$$x_3 = a + 3\Delta x = 0 + \frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

y así sucesivamente, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\,dx \approx \frac{\pi}{15}\left[f(0)+4f\left(\frac{\pi}{5}\right)+2f\left(\frac{2\pi}{5}\right)+4f\left(\frac{3\pi}{5}\right)+2f\left(\frac{4\pi}{5}\right)+4f(\pi)+2f\left(\frac{6\pi}{5}\right)+4f\left(\frac{7\pi}{5}\right)+\right.$$
$$\left. 2f\left(\frac{8\pi}{5}\right)+4f\left(\frac{9\pi}{5}\right)+f(2\pi)\right]$$
$$\approx \frac{\pi}{15}[2.7185+4(2.2457)+2(1.3621)+4(0.7342)+2(0.44529)+4(0.36788)$$
$$+2(0.44529)+4(0.73417)+2(1.36208)+4(2.24570)+2.71829]$$
$$\approx \frac{\pi}{15}[2.7185+8.9828+2.7242+2.9368+0.89058+1.47152$$
$$+0.89058+2.93668+2.72416+8.9828+2.71829]$$
$$\approx 7.95379$$

d. El error exacto al utilizar la regla del punto medio es

$$E_M = |I_M - I| = |7.95464 - 7.9549265| = 0.0002865$$

Mientras que el error exacto al utilizar la regla de Simpson es

$$E_S = |I_S - I| = |7.95379 - 7.9549265| = 0.0011$$

e. Para calcular el error exacto es necesario conocer el valor exacto de la integral. Si la integral no se puede calcular utilizando técnicas de integración, es imposible conocer su valor exacto y el error exacto no se podrá calcular.

El error cometido al utilizar la regla del punto medio se puede estimar utilizando la expresión

$$|E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

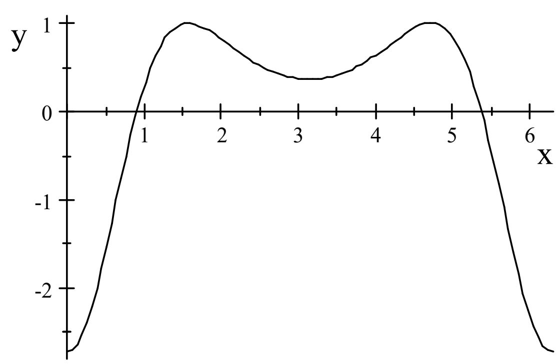
En donde n es el número de particiones y K es una cota superior de la segunda derivada de la función en el intervalo $[a,b]$

El problema de estimar el error es que a menudo es muy difícil calcular a mano la segunda derivada y obtener una buena cota superior K de $|f''(x)|$. Pero los sistemas algebraicos por computadora no tienen problema en calcular derivadas y graficarlas; así es posible determinar con facilidad, un valor para la cota superior K utilizando un programa matemático.

Calculando la segunda derivada con un programa y dibujando la gráfica

$$f''(x) = -(\cos x)e^{\cos x} + e^{\cos x} - e^{\cos x}\cos^2 x$$

La gráfica de la segunda derivada en el intervalo $[0,2\pi]$ es



A partir de la gráfica, se obtiene que el valor máximo está en $x = 0$ y es

$$|f''(0)| = \left|-(\cos(0))e^{\cos(0)} + e^{\cos(0)} - e^{\cos(0)}\cos^2(0)\right| = e$$

f. El error estimado utilizando la regla del punto medio se estima como

$$|E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2} = \frac{e(2\pi - 0)^3}{24(10)^2} = \frac{8e\pi^3}{2400} = 0.2809$$

g. El error estimado por el método de Simpson es

$$|E_S| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

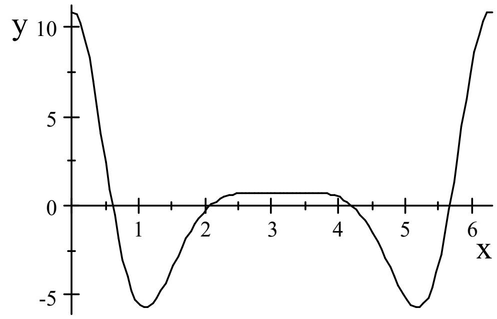
En donde n es el número de particiones y K es una cota superior de la cuarta derivada de la función en el intervalo $[a,b]$

El problema de estimar el error es que a menudo es muy difícil calcular a mano la cuarta derivada y obtener una buena cota superior K de $\left|f^{(4)}(x)\right|$. Pero los sistemas algebraicos por computadora no tienen problema en calcular derivadas y graficarlas; así es posible determinar con facilidad, un valor para la cota superior K utilizando un programa matemático.

Calculando la cuarta derivada, utilizando un programa de computo se obtiene

$$f^{(4)}(x) = -5(\cos x)e^{\cos x} - 3e^{\cos x} + 5\left(\cos^2 x\right)e^{\cos x} + 6\left(\cos^3 x\right)e^{\cos x} + e^{\cos x}\cos^4 x$$

Se dibuja ahora la gráfica de la cuarta derivada en el intervalo $[0,2\pi]$ para obtener una cota superior para el error por el método de Simpson



Se observa que el valor más grande de la cuarta derivada es en $x = 0$ y está dado por

$$f^{(4)}(0) = -5(\cos(0))e^{\cos(0)} - 3e^{\cos(0)} + 5(\cos^2(0))e^{\cos(0)} + 6(\cos^3(0))e^{\cos(0)} + e^{\cos(0)}\cos^4(0)$$

$$= 4e$$

$$\approx 10.9$$

h. el error estimado en la regla de Simpson es

$$\left|E_S\right| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4} = \frac{4e(2\pi - 0)^5}{180(10)^4} = \frac{128e\pi^5}{1800000} = 0.0592$$

i. Para obtener el valor de n, de tal forma que se obtenga la exactitud deseada, se procede como se muestra a continuación

$$\left|E_S\right| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

$$\frac{K(b-a)^5}{180n^4} \leq 0.0001$$

$$\frac{4e(2\pi - 0)^5}{180n^4} \leq 0.0001$$

$$\frac{128e\pi^5}{180n^4} \leq 0.0001$$

$$\frac{128e\pi^5}{180(0.0001)} \leq n^4$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{128e\pi^5}{180(0.0001)}}$$

$$n \geq 49.32$$

De donde se obtiene que $n \geq 50$ para que el error sea menor que 0.0001