

PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule la integral

$$\int \frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2} dx$$

Solución

Esta integral se debe calcular utilizando fracciones parciales. Como la fracción es propia, se procede a descomponer la fracción en sus fracciones parciales

El denominador tiene solo factores lineales, con un factor lineal repetido. La descomposición en fracciones parciales es de la forma siguiente

$$\frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

Para establecer los valores de las constantes se desarrolla la suma de fracciones en el lado derecho y se igualan los numeradores

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} \\ &= \frac{A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2)}{(x-2)(x-4)^2} \end{aligned}$$

Como las fracciones son iguales, los numeradores deben ser iguales

$$5x^2 - 33x + 54 = A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2)$$

Cuando los factores son lineales, una forma sencilla de encontrar los valores de las constantes consiste en asignar valores a x , de tal forma que se anulen algunos factores y se pueda despejar el valor de una constante.

Si $x = 4$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 33x + 54 &= A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2) \\ 5(4)^2 - 33(4) + 54 &= A(4-4)^2 + B(4-2)(4-4) + C(4-2) \\ 2 &= 2C \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Si $x = 2$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 33x + 54 &= A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2) \\ 5(2)^2 - 33(2) + 54 &= A(2-4)^2 + B(2-2)(2-4) + C(2-2) \\ 8 &= 4A \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de B podemos asignar cualquier otro valor a x

Si $x = 0$

$$5(0)^2 - 33(0) + 54 = A(0 - 4)^2 + B(0 - 2)(0 - 4) + C(0 - 2)$$

$$54 = 16A + 8B - 2C$$

$$B = \frac{54 - 16A + 2C}{8} = \frac{54 - 16(2) + 2(1)}{8}$$

$$B = 3$$

Al sustituir los valores de las constantes se obtiene

$$\frac{5x^2 - 33x + 54}{(x - 2)(x - 4)^2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 4} + \frac{1}{(x - 4)^2}$$

Calculando la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - 33x + 54}{(x - 2)(x - 4)^2} dx &= \int \left(\frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 4} + \frac{1}{(x - 4)^2} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{x - 2} dx + 3 \int \frac{1}{x - 4} dx + \int (x - 4)^{-2} dx \\ &= 2 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 4| + \frac{(x - 4)^{-1}}{-1} + c \\ &= 2 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 4| - \frac{1}{(x - 4)} + c \end{aligned}$$
