PROBLEMA RESUELTO 1

a. Use integración por partes para calcular el valor exacto de la integral

$$\int_{-1}^{2} xe^x \, dx$$

b. Calcula la integral del inciso anterior por la regla del trapecio con $n = 6$. Calcule el valor exacto del error cometido.

c. Utilice la regla de Simpson para calcular la integral anterior con $n = 6$. Calcule el valor exacto del error cometido.

Solución

a. Primero se calculará la integral indefinida usando integración por partes

Hacemos

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

Al sustituir se obtiene

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

Evaluando la integral para obtener el valor exacto con cuatro decimales

$$\int_{-1}^{2} xe^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_{-1}^{2} = \left(2e^2 - e^2\right) - \left(-e^{-1} - e^{-1}\right)$$

$$= e^2 + 2e^{-1}$$

$$= 8.1248$$

b. Calculando la integral por la regla del trapecio

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = 0.5$$

$x_0 = -1,$

$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + 0.5 = -0.5$

$x_2 = -1 + 2\Delta x = -1 + 2(0.5) = 0$

$x_3 = -1 + 3\Delta x = -1 + 3(0.5) = 0.5$

$x_5 = -1 + 5\Delta x = -1 + 5(0.5) = 1.5$

$x_4 = -1 + 4\Delta x = -1 + 4(0.5) = 1.0$

$x_6 = -1 + 6\Delta x = -1 + 6(0.5) = 2.0$

Entonces

$$\int_{-1}^{2} xe^x dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)]$$

$$\approx \frac{0.5}{2}[f(-1) + 2f(-0.5) + 2f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + f(2)]$$

$$\approx 0.25[-0.368 + 2(-0.303) + 2(0) + 2(0.824) + 2(2.718) + 2(6.722) + 14.778]$$

$$\approx 8.5835$$

El error exacto al usar la regla del trapecio está dado por

$$E_T = \left|\int_a^b f(x)dx - T\right|$$

$$E_T = \left|\int_{-1}^{2} xe^x dx - T\right| = |8.1248 - 8.5835| = 0.4587$$

El error relativo se obtiene al dividir el error total entre el valor exacto, para este ejemplo el error relativo es

$$\varepsilon_r = \frac{E_T}{V_E} = \frac{0.4587}{8.1248} \times 100 = 5.6\%$$

c. Utilizando la regla de Simpson se tiene

$$\int_{-1}^{2} xe^x dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)]$$

$$\approx \frac{0.5}{3}[f(-1) + 4f(-0.5) + 2f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)]$$

$$\approx \frac{0.5}{3}[-0.367 + 4(-0.303) + 2(0) + 4(0.824) + 2(2.718) + 4(6.722) + 14.778]$$

$$\approx 8.1368$$

El error exacto al calcular una integral por la regla de Simpson es

$$E_S = \left|\int_a^b f(x)dx - S\right|$$

Que para este ejemplo se obtiene

$$E_S = |8.1248 - 8.1368| = 0.012$$

El error relativo se obtiene al dividir el error total entre el valor exacto, para este ejemplo el error relativo es

$$\varepsilon_r = \frac{E_S}{V_E} = \frac{0.012}{8.1248} \times 100 = 0.15\%$$

Como se observa, es mucho menor que el obtenido al usar la regla del trapecio.