

PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la integral

$$\int \frac{4x - 5}{2x^3 - 5x^2 - 3x} dx$$

Solución

Esta integral se debe calcular utilizando fracciones parciales. Como la fracción es propia, se procede a factorizar el polinomio en el denominador

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 - 3x &= x(2x^2 - 5x - 3) \\ &= x(x - 3)(2x + 1) \end{aligned}$$

Como el denominador tiene solo factores lineales la descomposición en fracciones parciales es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{4x - 5}{2x^3 - 5x^2 - 3x} &= \frac{4x - 5}{x(x - 3)(2x + 1)} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{2x + 1} \end{aligned}$$

Para establecer los valores de las constantes se desarrolla la suma de fracciones en el lado derecho y se igualan los numeradores

$$\begin{aligned} \frac{4x - 5}{2x^3 - 5x^2 - 3x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{2x + 1} \\ &= \frac{A(x - 3)(2x + 1) + B(x)(2x + 1) + C(x)(x - 3)}{x(x - 3)(2x + 1)} \end{aligned}$$

Como las fracciones son iguales, los numeradores deben ser iguales

$$4x - 5 = A(x - 3)(2x + 1) + B(x)(2x + 1) + C(x)(x - 3)$$

Cuando los factores son lineales y no repetidos, la forma mas sencilla de encontrar los valores de las constantes consiste en asignar valores a x , de tal forma que se anulen algunos factores y se pueda despejar el valor de una constante.

Si $x = 0$

$$\begin{aligned} 4x - 5 &= A(x - 3)(2x + 1) + B(x)(2x + 1) + C(x)(x - 3) \\ 4(0) - 5 &= A(0 - 3)(0 + 1) + B(0)(0 + 1) + C(0)(0 - 3) \\ -5 &= A(-3)(1) \\ A &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Si $x = 3$

$$\begin{aligned} 4x - 5 &= A(x - 3)(2x + 1) + B(x)(2x + 1) + C(x)(x - 3) \\ 4(3) - 5 &= A(3 - 3)(6 + 1) + B(3)(6 + 1) + C(3)(3 - 3) \\ 7 &= B(3)(7) \\ B &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Si $x = -\frac{1}{2}$

$$4x - 5 = A(x - 3)(2x + 1) + B(x)(2x + 1) + C(x)(x - 3)$$

$$4\left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = A\left(-\frac{1}{2} - 3\right)(-1 + 1) + B\left(-\frac{1}{2}\right)(-1 + 1) + C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 3\right)$$

$$-7 = C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)$$

$$C = \frac{(-7)(4)}{(7)} = -4$$

Al sustituir los valores de las constantes se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{4x - 5}{2x^3 - 5x^2 - 3x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{2x + 1} \\ &= \frac{5}{3x} + \frac{1}{3(x - 3)} - \frac{4}{2x + 1} \end{aligned}$$

Calculando la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{4x - 5}{2x^3 - 5x^2 - 3x} dx &= \int \left(\frac{5}{3x} + \frac{1}{3(x - 3)} - \frac{4}{2x + 1} \right) dx \\ &= \frac{5}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 3} dx - 4 \int \frac{1}{2x + 1} dx \\ &= \frac{5}{3} \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|x - 3| - 4 \frac{\ln|2x + 1|}{2} + c \\ &= \frac{5}{3} \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|x - 3| - 2 \ln|2x + 1| + c \end{aligned}$$
