

## PROBLEMA RESUELTO 9

---

Calcule la integral

$$\int \sec^3 2x \, dx$$

### Solución

---

Observe que esta integral contiene solo la potencia de la secante y el exponente no es par. En este problema no se puede utilizar ninguno de los procedimientos utilizados en los ejemplos anteriores y se debe utilizar una estrategia diferente.

El problema se resuelve utilizando integración por partes, como se muestra a continuación

$$\int \sec^3 2x \, dx = \int \sec^2 2x \sec 2x \, dx$$

Haciendo

$$\begin{aligned} u &= \sec 2x & dv &= \sec^2 2x \, dx \\ du &= 2 \sec 2x \tan 2x \, dx & v &= \frac{1}{2} \tan 2x \end{aligned}$$

Aplicando la integración por partes

$$\begin{aligned} \int \sec^3 2x \, dx &= \int \sec^2 2x \sec 2x \, dx \\ &= uv - \int v \, du \\ &= (\sec 2x) \left( \frac{1}{2} \tan 2x \right) - \int \left( \frac{1}{2} \tan 2x \right) (2 \sec 2x \tan 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x - \int \tan^2 2x \sec 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x - \int (\sec^2 2x - 1) \sec 2x \, dx \\ \int \sec^3 2x \, dx &= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x - \int \sec^3 2x \, dx + \int \sec 2x \, dx \end{aligned}$$

Observe que en el lado derecho se repite la integral que se está calculando. Se debe trasladar al lado izquierdo de la igualdad para despejarla.

$$2 \int \sec^3 2x \, dx = \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x + \int \sec 2x \, dx$$

La integral en el lado derecho se calcula directamente por las fórmulas de integración

$$\begin{aligned} 2 \int \sec^3 2x \, dx &= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x + \frac{1}{2} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + c \\ \int \sec^3 2x \, dx &= \frac{1}{4} \sec 2x \tan 2x + \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + c \end{aligned}$$

---