PROBLEMA RESUELTO 8

Calcule la integral

$$\int \cot^5 2x\, dx$$

Solución

Observe que esta integral contiene solo la potencia de la cotangente. Aunque no aparece la función cosecante, como la cotangente tiene potencia impar, el problema se puede resolver de forma parecida al ejemplo 7.

Cuando la función cotangente tiene exponente impar se deben descomponer las potencias para obtener el diferencial $\cot x \csc x\, dx$, luego la potencia que queda de la función cotangente se convierte a cosecantes utilizando la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ y finalmente se hace la sustitución $u = \csc x$

Al seguir el procedimiento descrito se tiene que

$$\begin{aligned}\int \cot^5 x\, dx &= \int \cot^4 x \cot x\, dx \\ &= \int \left(\cot^2 x\right)^2 \cot x\, dx \\ &= \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \cot x\, dx\end{aligned}$$

Aun no se puede hacer la sustitución $u = \csc x$ ya que el diferencial $du = -\csc x \cot x\, dx$ no aparece completo en la integral.

Desarrollando el binomio y separando en 3 integrales

$$\begin{aligned}\int \cot^5 x\, dx &= \int \left(\csc^2 x - 2\csc x + 1\right) \cot x\, dx \\ &= \underbrace{\int \csc^2 x \cot x\, dx}_{1} - \underbrace{\int 2\csc x \cot x\, dx}_{2} + \underbrace{\int \cot x\, dx}_{3}\end{aligned}$$

La segunda y tercera integral se calculan directamente utilizando las fórmulas de integración. La primera integral se calcula a continuación

$$\int \csc^2 x \cot x\, dx = \int \csc x \csc x \cot x\, dx$$

Haciendo la sustitución

$$\begin{aligned} u &= \csc x \\ du &= -\csc x \cot x\, dx \\ -du &= \csc x \cot x\, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \csc^2 x \cot x \, dx &= \int u\,(-du)\\ &= -\frac{u^2}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\csc^2 x\end{aligned}$$

La respuesta del problema es

$$\begin{aligned}\int \cot^5 x \, dx &= \underbrace{\int \csc^2 x \cot x \, dx}_{1} - \underbrace{\int 2\csc x \cot x \, dx}_{2} + \underbrace{\int \cot x \, dx}_{3}\\ &= -\frac{1}{2}\csc^2 x - 2(-\csc x) + \ln|\operatorname{sen} x| + c\\ \int \cot^5 x \, dx &= -\frac{1}{2}\csc^2 x + 2\csc x + \ln|\operatorname{sen} x| + c\end{aligned}$$