PROBLEMA RESUELTO 7

Calcule la integral

$$\int \cot^3 2x \csc^3 2x\, dx$$

Solución

Las integrales que contienen potencia se cotangentes y cosecantes se calculan con los mismos procedimientos que se utilizan para las potencias de tangentes y secantes. Cuando la función cotangente tiene exponente impar se deben descomponer las potencias para obtener el diferencial $\cot x \csc x\, dx$, luego la potencia que queda de la función cotangente se convierte a cosecantes utilizando la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ y finalmente se hace la sustitución $u = \csc x$

Al seguir el procedimiento descrito se tiene que

$$\begin{aligned}\int \cot^3 2x \csc^3 2x\, dx &= \int \cot^2 2x \csc^2 2x \csc 2x \cot 2x\, dx \\ &= \int \left(\csc^2 2x - 1\right) \csc^2 2x \csc 2x \cot 2x\, dx\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$\begin{aligned}u &= \csc 2x \\ du &= -2 \csc 2x \cot 2x\, dx \\ -\frac{1}{2} du &= \csc 2x \cot 2x\, dx\end{aligned}$$

Se obtiene una integral que se calcula fácilmente

$$\begin{aligned}\int \cot^3 2x \csc^3 2x\, dx &= \int \left(u^2 - 1\right) u^2 \left(-\frac{1}{2} du\right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(u^4 - u^2\right) du \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right) + c \\ &= \frac{u^3}{6} - \frac{u^5}{10} + c\end{aligned}$$

Sustituyendo $u = \csc 2x$ se obtiene la respuesta del problema

$$\int \cot^3 2x \csc^3 2x\, dx = \frac{\csc^3 2x}{6} - \frac{\csc^5 2x}{10} + c$$