

PROBLEMA RESUELTO 5

Calcule la integral

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

Solución

Cuando una integral de potencias de senos y cosenos tiene solamente exponentes pares, hay que utilizar las siguientes identidades para reducir las potencias

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Al utilizar estas identidades para resolver el problema se tiene

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + \cos 2x - 2\cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{8} \int dx}_1 - \underbrace{\frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx}_2 - \underbrace{\frac{1}{8} \int \cos^2 2x \, dx}_3 + \underbrace{\frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx}_4 \end{aligned}$$

La primera y la segunda integral se calculan directamente, para calcular la tercera integral es necesario utilizar nuevamente la identidad de reducción de potencias

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Calculando la integral 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \, dx \\ &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 4x) \, dx \\ &= \frac{1}{16} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \\ &= \frac{1}{16} x + \frac{1}{64} \sin 4x \end{aligned}$$

La cuarta integral tiene una potencia impar, por lo que se calcula utilizando la técnica de los primeros 3 ejemplos resueltos

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx\end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$\begin{aligned}u &= \sin 2x \\ du &= 2 \cos 2x \, dx \\ \frac{1}{2} du &= \cos 2x \, dx\end{aligned}$$

La integral 4 se calcula como

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1 - u^2) \left(\frac{1}{2} du \right) \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - u^2) \, du \\ &= \frac{1}{16} \left(u - \frac{1}{3} u^3 \right) \\ &= \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x\end{aligned}$$

Remplazando los resultados de las integrales 3 y 4 y calculando las integrales 1 y 2 se obtiene la respuesta del problema

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) - \left(\frac{1}{16} x + \frac{1}{64} \sin 4x \right) + \left(\frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x \right) + c \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c\end{aligned}$$
