PROBLEMA RESUELTO 5

Calcule la integral

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, dx$$

Solución

Esta integral se puede calcular utilizando integración por partes de la siguiente forma

$$u = e^{-2x} \qquad dv = \cos 3x dx$$

$$du = -2e^{-2x} dx \qquad v = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$$

Al efectuar las sustituciones se obtiene

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx &= uv - \int v du \\ &= \left(e^{-2x}\right)\left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x\right) - \int \left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x\right)\left(-2e^{-2x}\right) dx \qquad (1) \\ \int e^{-2x} \cos 3x \, dx &= \frac{1}{3} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{3} \int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x \, dx \end{aligned}$$

Observe que la integral resultante en el lado derecho es muy similar a la integral inicial,

Al integrar de nuevo por partes se tiene

$$\int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x \, dx$$

$$u = e^{-2x} \qquad dv = \operatorname{sen} 3x dx$$

$$du = -2e^{-2x} dx \qquad v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x \, dx &= \left(e^{-2x}\right)\left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) - \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right)\left(-2e^{-2x} dx\right) \\ &= -\frac{1}{3} e^{-2x} \cos 3x - \frac{2}{3} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx \end{aligned} \qquad (2)$$

Observe que ahora en lado derecho se obtiene la integral inicial. Al parecer nos topamos con un proceso que no se termina nunca, sin embargo, al sustituir el resultado de (2) en el resultado de (1) es posible despejar la integral buscada

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} e^{-2x} \cos 3x - \frac{2}{3} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx\right)$$

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{9} e^{-2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx$$

Como la integral en el lado izquierdo es igual que la integral en el lado derecho podemos pasar ésta última al lado izquierdo y sumarlas y así obtener la respuesta

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx + \frac{4}{9}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x$$

$$\frac{13}{9}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x$$

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x\right)$$

Finalmente

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{3}{13}e^{-2x}\operatorname{sen}3x - \frac{2}{13}e^{-2x}\cos 3x + c$$

O bien la respuesta puede expresarse como

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{13}e^{-2x}\left(3\operatorname{sen}3x - 2\cos 3x\right) + c$$