PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule la integral

$$\int \cos^4 x \, dx$$

Solución

Cuando una integral de potencias de senos y cosenos tiene solamente exponentes pares, hay que utilizar las siguientes identidades para reducir las potencias

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Al utilizar estas identidades para resolver el problema se tiene

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx \\
&= \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx
\end{aligned}$$

Observe que dentro del paréntesis aparece $\cos^2 2x$, razón por la cual hay que utilizar nuevamente la identidad, ahora expresada como

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx
\end{aligned}$$

Las tres integrales que aparecen dentro del paréntesis son sencillas y se pueden calcular directamente

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \frac{2\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) + c \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + c
\end{aligned}$$