

PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule la integral

$$\int x^2 \tan^{-1} x dx$$

Solución

Esta integral se puede calcular utilizando integración por partes de la siguiente forma Sea:

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= x^2 dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} dx & v &= \frac{1}{3} x^3 \end{aligned}$$

Calculando la integral

$$\begin{aligned} \int x^2 \tan^{-1} x dx &= (\tan^{-1} x) \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - \int \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

para calcular la integral de la derecha es necesario efectuar la división ya que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador. Al efectuar la división de polinomios se tiene

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Reemplazando la expresión anterior y separando en dos integrales se tiene

$$\begin{aligned} \int x^2 \tan^{-1} x dx &= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{6} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

La última integral se calcula por medio de una sustitución directa $w = x^2 + 1$, obteniéndose que la solución del problema es

$$\int x^2 \tan^{-1} x dx = \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) + c$$
