PROBLEMA RESUELTO 3

Resuelva el sistema de ecuaciones dado por el método de la matriz inversa

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de la matriz inversa

$$\begin{array}{ccccccccc} w & + & x & & & + & z & = & 2 \\ w & & & + & y & & & = & 0 \\ & & x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Solución

Al escribir el sistema en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes. El cálculo se realizará utilizando operaciones elementales

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Efectuando operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada reducida

$F1 \times (-1) + F2 \rightarrow F2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F2 \div (-1) \rightarrow F2$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F2 \times (-1) + F1 \rightarrow F1$

$F2 \times (-1) + F3 \rightarrow F3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F3 \leftrightarrow F4$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$F3 \times (-1) + F1 \rightarrow F1$

$F3 \times (1) + F2 \rightarrow F2$

$F3 \times (-2) + F4 \rightarrow F4$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$F4 \div (-2) \rightarrow F4$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$F4 \times (1) + F1 \rightarrow F1$

$F4 \times (2) + F2 \rightarrow F2$

$F4 \times (-1) + F3 \rightarrow F3$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Como en el lado izquierdo de la matriz se ha obtenido la matriz identidad, la matriz de lado derecho es la matriz inversa, es decir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema se obtiene multiplicando la matriz inversa por la matriz de términos independientes

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w = \left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(4) + (0)(1) = -1$$

$$x = (0)(2) + (0)(0) + (1)(4) + (-1)(1) = 3$$

$$y = \left(-\frac{1}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(\frac{1}{2}\right)(4) + (0)(1) = 1$$

$$z = \left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(4) + (1)(1) = 0$$

Es decir que la única solución del sistema es $w = -1$, $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$