# PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule la integral

$$\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} t}}\,dt$$

## Solución

Aunque en este problema aparece una potencia racional, al involucrar únicamente potencias se senos y cosenos con un exponente impar, el problema se puede resolver como en los ejemplos 1 y 2

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

En donde $n$ es una potencia impar y $m$ es una potencia fraccionaria negativa, por lo tanto, hay que descomponer la potencia impar en la forma $\cos^n x = \cos^{n-1}\cos x$, utilizar la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} t}}\,dt &= \int (\operatorname{sen} t)^{-1/3}\cos^3 t\,dt \\
&= \int (\operatorname{sen} t)^{-1/3}\cos^2 t\cos t\,dt \\
&= \int (\operatorname{sen} t)^{-1/3}\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)\cos t\,dt \\
&= \int \left[(\operatorname{sen} t)^{-1/3} - (\operatorname{sen} t)^{5/3}\right]\cos t\,dt
\end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$u = \operatorname{sen} t$$

$$du = \cos t\,dt$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} t}}\,dt &= \int (\operatorname{sen} t)^{-1/3}\cos^3 t\,dt \\
&= \int \left[u^{-1/3} - u^{5/3}\right]du \\
&= \frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}} - \frac{u^{8/3}}{\frac{8}{3}} + c \\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} - \frac{3}{8}u^{8/3} + c
\end{aligned}$$

Como $u = \operatorname{sen} t$, la respuesta del problema es

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} t}}\,dt &= \frac{3}{2}(\operatorname{sen} t)^{2/3} - \frac{3}{8}(\operatorname{sen} t)^{8/3} + c = \frac{3}{2}(\operatorname{sen} t)^{2/3}\left(1 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t\right) + c \\
&= \frac{3(\operatorname{sen} t)^{2/3}\left(4 - \operatorname{sen}^2 t\right)}{8} + c
\end{aligned}$$