

PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule la integral

$$\int (x^2 - 4)e^{-2x} dx$$

Solución

La integración por partes establece que

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Haciendo

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 4 & dv &= e^{-2x} dx \\ du &= 2x dx & v &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{aligned}$$

Ahora se utiliza la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \int (x^2 - 4)e^{-2x} dx &= (x^2 - 4)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 4)e^{-2x} + \int xe^{-2x} dx \end{aligned}$$

Observe que la integral

$$\int xe^{-2x} dx$$

Es mas sencilla que la integral inicial, y para calcularla se utiliza nuevamente integración por partes, como se muestra a continuación

Haciendo

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^{-2x} dx \\ du &= dx & v &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int xe^{-2x} dx &= (x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en la integral anterior se obtiene la respuesta del problema

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 4)e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}(x^2 - 4)e^{-2x} + \int xe^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 4)e^{-2x} + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) + c \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 4)e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c \end{aligned}$$
