

PROBLEMA RESUELTO 3

Determine los valores de k , de tal que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} kx + 3y &= -3 \\ x + (k-2)y &= 3 \end{aligned}$$

- a. Tenga solución única.
- b. No tenga solución.
- c. Tenga infinitas soluciones.

Solución

Este problema se puede resolver de diferentes maneras, una de ellas es utilizando determinantes, ya que, si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el sistema de ecuaciones tiene solución única, mientras que si el determinante es igual a cero, el sistema de ecuaciones asociado tiene infinitas soluciones o bien no tiene solución.

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes en términos de la constante k

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix} &= k(k-2) - (3)(1) \\ &= k^2 - 2k - 3 \end{aligned}$$

Igualando el determinante a cero y despejando k

$$\begin{aligned} k^2 - 2k - 3 &= 0 \\ (k-3)(k+1) &= 0 \\ k &= 3, \quad k = -1 \end{aligned}$$

Para $k = 3$ y $k = -1$ el sistema puede ser inconsistente o bien puede tener infinitas soluciones,

Resolviendo el sistema cuando $k = 3$, la matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Intercambiando la fila 1 con la fila 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Fila 1 por -3 mas fila 2 en fila 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Dividiendo la fila 2 entre -12

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente de ecuaciones es

$$x + y = 3$$

$$0 = 1$$

Por lo tanto, cuando $k = 3$ el sistema de ecuaciones es inconsistente.

Resolviendo el sistema de ecuaciones cuando $k = -1$. La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Intercambiando la fila 1 con la fila 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Fila 1 por 1 mas fila 2 en fila 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente de ecuaciones es

$$x + y = 3$$

$$0 = 0$$

Por lo tanto, cuando $k = -1$ el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

Para cualquier otro valor de k el determinante es diferente de cero y tiene solución única.
