PROBLEMA RESUELTO 2

Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre la matriz inversa por el método de operaciones elementales.

b. Encuentre la matriz inversa por el método de cofactores.

Solución

a. Construyendo la matriz $[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Efectuando operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada reducida

$F1 \times (-1) + F2 \rightarrow F2$

$F1 \times (-2) + F3 \rightarrow F3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$F2 \times (-1) + F1 \rightarrow F1$

$F2 \times (-1) + F3 \rightarrow F3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$F3 \times (5) + F1 \rightarrow F1$

$F3 \times (-2) + F2 \rightarrow F2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como la matriz anterior tiene la forma $\begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$, se concluye que la matriz inversa, de la matriz A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Para encontrar la matriz inversa por el método de cofactores, primero se calcula el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (1)[-6+3] - (1)[-3+2] + (-3)[3-4]$$

$$= (1)(-3) - (1)(-1) + (-3)(-1)$$

$$= -3 + 1 + 3$$

$$= 1$$

Como el determinante es diferente de cero, la matriz A es invertible.

Calculando los 9 cofactores de la matriz A

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = +(-6+3) = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+2) = -(-1) = 1$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(3-4) = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+9) - 6$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = +(-3+6) = 3$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-1+6) = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+3) - 2$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2-1) = 1$$

La matriz inversa es

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adjA} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$