PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule la integral

$$\int \operatorname{sen}^5 \pi x \, dx$$

Solución

Esta es una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

En donde m es una potencia impar y n es igual a cero, que se puede tomar como potencia par, por lo tanto, hay que descomponer la potencia impar en la forma $\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{m-1} \operatorname{sen} x$, utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y hacer la sustitución $u = \cos x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 \pi x \, dx &= \int \operatorname{sen}^4 \pi x \operatorname{sen} \pi x \, dx \\ &= \int \left(\operatorname{sen}^2 \pi x\right)^2 \operatorname{sen} \pi x \, dx \\ &= \int \left(1 - \cos^2 \pi x\right)^2 \operatorname{sen} \pi x \, dx \end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$\begin{aligned} u &= \cos \pi x \\ du &= -\pi \operatorname{sen} \pi x \, dx \\ -\frac{1}{\pi} du &= \operatorname{sen} \pi x \, dx \end{aligned}$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 \pi x \, dx &= \int \left(1 - u^2\right)^2 \left(-\frac{1}{\pi} du\right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \left(1 - 2u^2 + u^4\right) du \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + c \end{aligned}$$

Como $u = \cos \pi x$, la respuesta del problema es

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 \pi x \, dx &= -\frac{1}{\pi}\left(\cos \pi x - \frac{2}{3}\cos^3 \pi x + \frac{1}{5}\cos^5 \pi x\right) + c \\ &= -\frac{1}{\pi}\cos \pi x + \frac{2}{3\pi}\cos^3 \pi x - \frac{1}{5\pi}\cos^5 \pi x + c \end{aligned}$$