PROBLEMA RESUELTO 2

Utilice propiedades de los determinantes para calcular el determinante de la matriz dada al menos de dos formas distintas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 13 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

a. Un determinante de 4 por 4 es mejor calcularlo utilizando propiedades ya que por la definición, al desarrollar cofactores se obtendrían 4 determinantes de 3 por 3.

En los determinantes se puede multiplicar una fila por un número y sumársela a otra fila sin que éste se altere. Al usar esta propiedad como se indica a continuación se obtiene

Fila $1 \times -3 +$ fila $2 \rightarrow$ fila 2

Fila $1 \times -5 +$ fila $3 \rightarrow$ fila 3

Fila $1 \times -1 +$ fila $4 \rightarrow$ fila 4

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 13 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -12 & -7 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

Como la primera columna tiene solo un 1 y los otros elementos son cero, al desarrollar cofactores en la primera columna el determinante se reduce a calcular un determinante de 3 por 3.

Si no queremos seguir haciendo operaciones entre filas se tiene.

$$\begin{aligned}
|A| &= (1)\begin{vmatrix} -8 & -12 & -7 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} \\
&= (1)\left[(-8)\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - (-12)\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right] \\
&= (1)[(-8)(-12) + (12)(-18) - (7)(-2)] \\
&= -106
\end{aligned}$$

b. Si en lugar de calcular un determinante de 3 por 3 seguimos utilizando propiedades, al retomar el determinante de 4 por 4 se tiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -12 & -7 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

Dividiendo la fila 3 entre –2 para obtener un 1 en el primer número diferente de cero en la tercera fila.

Se debe multiplicar todo el determinante por –2 para no alterarlo, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -12 & -7 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -12 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

Ahora se puede intercambiar la fila 2 por la fila 3, al hacer esto en un determinante ésta cambia de signo, entonces

$$|A| = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -12 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -12 & -7 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

Efectuando operaciones elementales para hacer cero los elementos en la segunda columna por debajo del 1 se tiene

Fila 2×8 + fila 2 $\rightarrow$ fila 3

Fila 2×4 + fila 4 $\rightarrow$ fila 4

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -12 & -7 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

En este momento el cálculo del determinante se reduce a calcular un determinante de 2 por 2

$$|A| = (2)(1)(1)\begin{vmatrix} -4 & 17 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 2[(-4)(9) - (17)(1)] = 2[-36 - 17] = 2(-53) = -106$$

c. Para no calcular un determinante de dos se pueden seguir realizando operaciones elementales entre filas en el determinante de 4 por 4. Al intercambiar la fila 3 por la fila 4 se tiene

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \end{vmatrix}$$

Fila 3×4 + fila 4 $\rightarrow$ fila 4

$$|A| = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 53 \end{vmatrix}$$

Como la última matriz es triangular superior, su determinante es igual al producto de los elementos en la diagonal, entonces

$$|A| = -2(1)(1)(1)(53) = -106$$