PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la integral

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

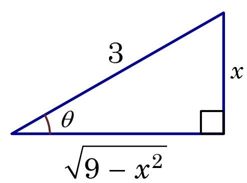
Solución

Esta es una integral que se presenta frecuentemente en los cálculos matemáticos ya que puede representar el área de una semicircunferencia de radio 3 cuando los límites de integración van de -3 a 3

Como se puede observar la integral tiene una expresión de la forma

$$a^2 - u^2 = (3)^2 - x^2$$

x y 3 se pueden representar como lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura siguiente



El cateto adyacente se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras. La sustitución a realizar se puede obtener fácilmente utilizando razones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$$

$$x = 3\operatorname{sen}\theta$$

Calculando el diferencial dx

$$dx = 3\cos\theta\,d\theta$$

Sustituyendo x y dx en la integral propuesta se obtendrá una integral que solo contiene funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-x^2}\,dx &= \int \sqrt{9-(3\operatorname{sen}\theta)^2}\,(3\cos\theta\,d\theta) \\ &= 3\int \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta) \\ &= 3\int \sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\,\cos\theta\,d\theta)\end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica

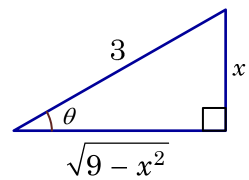
$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-x^2}\,dx &= 3\int \sqrt{9(\cos^2\theta)}\,\cos\theta\,d\theta) \\ &= 3\int 3\cos\theta\cos\theta\,d\theta) \\ &= 9\int \cos^2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

La integral trigonométrica se calcula por la fórmula de reducción de potencias

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-x^2}\,dx &= 9\int \cos^2\theta\, d\theta \\ &= 9\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,d\theta \\ &= \frac{9}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) + c \\ &= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 2\theta + c \\ &= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c \\ &= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c\end{aligned}$$

Ahora solo hace falta expresar la respuesta en términos de x. Para ello podemos utilizar algunas identidades y recurrir nuevamente al triángulo rectángulo, de donde se obtiene que



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}, \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right), \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Efectuando las sustituciones

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-x^2}\,dx &= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + c \\ &= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c\end{aligned}$$