PROBLEMA RESUELTO 1

Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre la matriz inversa por el método de operaciones elementales.

b. Encuentre la matriz inversa por el método de cofactores.

Solución

a. Construyendo la matriz $[A \quad I]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada reducida

$F1 \times (-2) + F2 \to F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$F2 \div (11) \to F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$F2 \times (-3) + F1 \to F1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Como la matriz escalonada reducida tiene la forma $[I \quad B]$, se concluye que la matriz A es invertible y su matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{11} & \dfrac{3}{11} \\ -\dfrac{2}{11} & \dfrac{1}{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Para encontrar la matriz inversa por el método de cofactores, primero se calcula el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (-3)(2) = 5 + 6 = 11$$

Como el determinante es diferente de cero, la matriz A es invertible.

Calculando los 4 cofactores de la matriz A

$$A_{11} = +5$$

$$A_{12} = -2$$

$$A_{21} = -(-3) = 3$$

$$A_{22} = +1$$

La matriz adjunta es

$$\text{adjA}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede calcular la matriz inversa

$$\text{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adjA} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$