PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la integral

$$\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx$$

Solución

Esta es una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

En donde n es una potencia impar, por lo tanto, hay que descomponer la potencia impar y en la forma $\cos^n x = \cos^{n-1} \cos x$, utilizar la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x \cos 2x \, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^2 2x \left(1 - \operatorname{sen}^2 2x\right) \cos 2x \, dx \\
&= \int \left(\operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}^4 2x\right) \cos 2x \, dx
\end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$\begin{aligned}
u &= \operatorname{sen} 2x \\
du &= 2 \cos 2x \, dx \\
\frac{1}{2} du &= \cos 2x \, dx
\end{aligned}$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx &= \int \left(u^2 - u^4\right) \left(\frac{1}{2} du\right) \\
&= \frac{1}{2} \int \left(u^2 - u^4\right) du \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4}\right) + c \\
&= \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{8} u^4 + c
\end{aligned}$$

Como $u = \operatorname{sen} 2x$, la respuesta del problema es

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{6} (\operatorname{sen} 2x)^3 - \frac{1}{8} (\operatorname{sen} 2x)^4 + c \\
&= \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3 2x - \frac{1}{8} \operatorname{sen}^4 2x + c
\end{aligned}$$