PROBLEMA RESUELTO 1

Un cafetalero quiere preparar 100 libras de café en grano mezclando café de tres regiones, Escuintla, Antigua y Cobán. Cada libra de café de Escuintla cuesta Q20, de antigua cuesta Q30 y el de Cobán cuesta Q40 la libra. El productor desea que el costo total del quintal tenga un valor de Q3,200 y que la cantidad de café antigüeño sea el doble que el café de Cobán. Determine cuántas libras de café debe utilizar de cada región para preparar la mezcla requerida.

Solución

Sea: x = Número de libras de café de Escuintla.

y = Número de libras de café de Antigua.

z = Número de libras de café de Cobán.

La suma de las cantidades utilizadas de cada región debe ser igual, es decir que

$$x + y + z = 100$$

Al sumar los costos de las cantidades de café a utilizar según su región, debe ser igual a Q320

$$20x + 30y + 40z = 3200$$

Como la cantidad de café antigüeño es el doble del café de Cobán se tiene que

$$y = 2z$$

$$y - 2z = 0$$

El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 2x + 3y + 4z &= 320 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones por el método de la matriz inversa se tiene que comenzar calculando la matriz inversa de la matriz de coeficientes. El calculo se realizará por el método de la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F1 \times (-2) + F2 \rightarrow F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F2 \times (-1) + F1 \rightarrow F1$

$F2 \times (-1) + F3 \rightarrow F3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$F3 \div (-4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$F3 \times (1) + F1 \rightarrow F1$

$F3 \times (-2) + F2 \rightarrow F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

De donde la matriz inversa de la matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa existe, el sistema tiene solución única dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \left(\frac{5}{2}\right)(100) + \left(-\frac{3}{4}\right)(320) + \left(-\frac{1}{4}\right)(0) = 10$$

$$y = (-1)(100) + \left(\frac{1}{2}\right)(320) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) = 60$$

$$z = \left(-\frac{1}{2}\right)(100) + \left(\frac{1}{4}\right)(320) + \left(-\frac{1}{4}\right)(0) = 30$$

Por lo tanto, debe utilizar 10 libras de café de escuintla, 60 libras de café de antigua y 30 libras de café de Cobán.