UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-1-V-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**20 de Febrero de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Inga. Vera Marroquín**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

PRIMER PARCIAL

TEMA 1 (10 PUNTOS)

Usando Eliminación Gauss - Jordan, encuentre la solución al sistema de ecuaciones lineales. Si tiene múltiples soluciones, escriba su respuesta en forma matricial.

$$\begin{aligned} m + 2n - p - r &= 2 \\ 3m + 5n + 2r &= -2 \end{aligned}$$

TEMA 2 (15 PUNTOS)

Determine los valores de *"k"* tal que el sistema de ecuaciones lineales, tenga:

a. Solución única
b. No tenga solución
c. Infinitas soluciones

$$\begin{aligned} (k-1)x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= -1 \\ 2x + (k+1)y + 2z &= -2 \end{aligned}$$

TEMA 3 (15 PUNTOS)

Una empresa turística que vende paquetes de viaje para un fin de semana, ofrece tres tipos de paquetes. Económico, clásico y el plus. Los cuales incluyen: pasajes, alojamiento y meriendas. El paquete económico incluye: \$ 200 de pasaje, \$ 120 de alojamiento y \$ 30 de meriendas. El paquete clásico incluye: \$250 de pasaje, \$ 180 de alojamiento y \$ 60 de meriendas. Y un paquete plus incluye: \$ 400 en pasajes, \$ 300 de alojamiento y \$100 de meriendas. Si la empresa desea que la cantidad de dinero ganado sea: en pasajes un mínimo de \$ 40500, \$ 27600 en alojamiento y \$ 8400 en meriendas, Usando eliminación Gaussiana, determine el número de paquetes que debe vender la empresa para satisfacer el dinero ganado, o demuestre que la información es incorrecta. ***Recuerde que debe plantear el sistema de ecuaciones lineales, identificando sus variables.***

TEMA 4 (20 PUNTOS)

Dada el siguiente sistema de ecuaciones, calcule:

1. El deter minante de la matriz de coeficientes, e indique si la matriz tiene inversa
2. Si la matriz Inversa existe, calcúlela. Indicando el método a utilizar.
3. Encuentre la solución al sistema, usando la matriz inversa.

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= -8 \\ x - y + 4z &= 11 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

TEMA 5 (40 PUNTOS) Utilizando técnicas de integración, resuelva las siguientes integrales.

1. $\int x^2 \tan^{-1} x dx$.
2. $\int \cos(\ln x)\, dx$
3. $\int \sqrt{\cos z}\, (sen\ z)^3\, dz$
4. $\int \frac{(x+3)^3}{\sqrt{6x+x^2}}\, dx$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Intermedia 1**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema No. 1: 10 puntos

Usando Eliminación Gauss - Jordan, encuentre la solución al sistema de ecuaciones lineales. Si tiene múltiples soluciones, escriba su respuesta en forma matricial.

$$\begin{aligned} m + 2n - p - r &= 2 \\ 3m + 5n + 2r &= -2 \end{aligned}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea el sistema en forma matricial, utilizando operaciones entre filas para llevar la matriz a la forma escalonada.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $F_2 \to F_2 - 3F_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ $F_2 \to -F_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$
2.	El sistema posee infinitas soluciones, se asignan parámetros a las variables p y r para expresar las variables restantes en términos de estas. Se plantea la solución en forma matricial.	$Despejando\ para\ n:$ $n = 3p + 5r + 8$ $Despejando\ para\ m:$ $m = 2 - 2n + p + r$ $m = 2 - 6p - 10r - 16 + p + r$ $m = -5p - 9r - 14$ $p = a$ $r = b$ $Solución:$ $\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} -14 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tema No. 2: 15 puntos

Determine los valores de *"k"* tal que el sistema de ecuaciones lineales, tenga:

a. Solución única
b. No tenga solución
c. Infinitas soluciones

$$\begin{aligned} (k-1)x &+ y - z = 1 \\ x &+ y + z = -1 \\ 2x &+ (k+1)y + 2z = -2 \end{aligned}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se calcula el determinante para la matriz de coeficientes, se iguala el determinante a 0 para hallar los valores de k para los cuales la matriz no es invertible.	$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & k+1 & 2 \end{vmatrix}$ $\det(A) = (k-1)\big(2-(k+1)\big) - 1(2-2)$ $-1(k+1-2)$ $\det(A) = (k-1)(-k+1) - k - 1 + 2$ $\det(A) = k - k^2$ $\det(A) = 0$ $k - k^2 = 0$ $k(1-k) = 0$ $k = 0$ $k = 1$
2.	Se sustituyen los valores de k en la matriz de coeficientes, se plantea la matriz aumentada, mediante Eliminación Gaussiana se encuentra la solución del sistema para cada caso.	$Para\ k = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $F_2 \to F_2 + F_1$ $F_3 \to F_3 + 2F_1$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F_3 \to \frac{1}{3}F_3 - \frac{1}{2}F_2$

		$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F_1 \rightarrow -F_1$ $F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $El\ sistema\ posee\ infinitas\ soluciones\ para\ k = 0$ $Para\ k = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $El\ sistema\ posee\ infinitas\ soluciones\ para\ k = 1$
3.	En base a las evaluaciones de los valores k en el sistema propuesto se plantean las respuestas para cada inciso.	$a)\ Solución\ única\ para\ k \neq 0{,}1$ $b)\ No\ hay\ valor\ de\ k\ que\ haga\ que\ el\ sistema\ no\ tenga\ solución$ $c)\ Infinitas\ soluciones\ para\ k = 0{,}1$

Tema No. 3: 15 puntos

Una empresa turística que vende paquetes de viaje para un fin de semana, ofrece tres tipos de paquetes. Económico, clásico y el plus. Los cuales incluyen: pasajes, alojamiento y meriendas. El paquete económico incluye: $ 200 de pasaje, $ 120 de alojamiento y $ 30 de meriendas. El paquete clásico incluye: $250 de pasaje, $ 180 de alojamiento y $ 60 de meriendas. Y un paquete plus incluye: $ 400 en pasajes, $ 300 de alojamiento y $100 de meriendas. Si la empresa desea que la cantidad de dinero ganado sea: en pasajes un mínimo de $ 40500, $ 27600 en alojamiento y $ 8400 en meriendas, Usando eliminación Gaussiana, determine el número de paquetes que debe vender la empresa para satisfacer el dinero ganado, o demuestre que la información es incorrecta. ***Recuerde que debe plantear el sistema de ecuaciones lineales, identificando sus variables.***

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se ordena la información proporcionada en una tabla, se plantean las ecuaciones en base a la misma.	(ver abajo)
2.	Se construye la matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones, se utiliza el método de Eliminación Gaussiana para hallar la solución del sistema.	(ver abajo)

Operatoria 1.

	Pasajes	Alojamiento	Meriendas
Económico	200	120	30
Clásico	250	180	60
Plus	400	300	100

$$Paquete\ Económico = E$$

$$Paquete\ Clásico = C$$

$$Paquete\ Plus = P$$

$$Sistema\ de\ Ecuaciones:$$

$$\begin{aligned} 200E + 250C + 400P &= 40500 \\ 120E + 180C + 300P &= 27600 \\ 30E + 60C + 100P &= 8400 \end{aligned}$$

Operatoria 2.

$$\begin{pmatrix} 200 & 250 & 400 & 40500 \\ 120 & 180 & 300 & 27600 \\ 30 & 60 & 100 & 8400 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \to F_2 - \frac{120}{200}F_1$$
$$F_3 \to F_3 - \frac{30}{200}F_1$$

		$$\begin{pmatrix} 200 & 250 & 400 & 40500 \\ 0 & 30 & 60 & 3300 \\ 0 & 45/2 & 40 & 2325 \end{pmatrix}$$ $$F_3 \to F_3 - \frac{45}{60}F_2$$ $$\begin{pmatrix} 200 & 250 & 400 & 40500 \\ 0 & 30 & 60 & 3300 \\ 0 & 0 & -5 & -150 \end{pmatrix}$$ $$-5P = -150$$ $$P = 30$$ $$\frac{45}{2}C = 2325 - 40P$$ $$C = 50$$ $$200E = 40500 - 400P - 250C$$ $$E = 80$$
3.	En base a la información obtenida se plantea la solución del problema.	*Respuesta*: *La empresa debe vender*: 30 *Paquetes Económicos* 50 *Paquetes Clásicos* 80 *Paquetes Plus*

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Intermedia 1**

Tema No. 4: 20 puntos

Dada el siguiente sistema de ecuaciones, calcule:

1. El determinante de la matriz de coeficientes, e indique si la matriz tiene inversa
2. Si la matriz Inversa existe, calcúlela. Indicando el método a utilizar.
3. Encuentre la solución al sistema, usando la matriz inversa.

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= -8 \\ x - y + 4z &= 11 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes para determinar si es invertible.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $det(A) = 3(1-8) - 2(-1-4) - 5(2+1)$ $\det(A) = -21 + 12 - 15$ $\det(A) = -26$ $Si\ \det(A) = 0, La\ matriz\ no\ es\ invertible$ $\det(A) = -26\ \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$
2.	Se encuentra la matriz inversa, utilizando el método de cofactores.	$C_{11} = (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$ $C_{12} = (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$ $C_{13} = (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ $C_{21} = (-1)^{2+1} * \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8$ $C_{22} = (-1)^{2+2} * \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ $C_{23} = (-1)^{2+3} * \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

		$C_{31} = (-1)^{3+1} * \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$ $C_{32} = (-1)^{3+2} * \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -17$ $C_{33} = (-1)^{3+3} * \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$ $C = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ -8 & 2 & -4 \\ 3 & -17 & -5 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$ $A^{-1} = \frac{1}{-26} * \begin{pmatrix} -7 & -8 & 3 \\ 5 & 2 & -17 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/26 & 4/13 & -3/26 \\ -5/26 & -1/13 & 17/26 \\ -3/26 & 2/13 & 5/26 \end{pmatrix}$
3.	Con la matriz inversa, se encuentran las soluciones del sistema, de la forma: $x = A^{-1}B$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/26 & 4/13 & -3/26 \\ -5/26 & -1/13 & 17/26 \\ -3/26 & 2/13 & 5/26 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{26}\right)(-8) + \left(\frac{4}{13}\right)(11) + \left(-\frac{3}{26}\right)(2) \\ \left(-\frac{5}{26}\right)(-8) + \left(-\frac{1}{13}\right)(11) + \left(\frac{17}{26}\right)(2) \\ \left(-\frac{3}{26}\right)(-8) + \left(\frac{2}{13}\right)(11) + \left(\frac{5}{26}\right)(2) \end{pmatrix}$ $x = 1$ $y = 2$ $z = 3$

Tema No. 5: 40 puntos

Utilizando técnicas de integración, resuelva las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\int x^2 \tan^{-1} x dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se utiliza la técnica de integración por partes para plantear la solución de la integral.	$u = \tan^{-1} x \qquad dv = x^2 dx$ $du = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad v = \dfrac{x^3}{3}$ $\displaystyle\int x^2 \tan^{-1} x\, dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$ $\displaystyle Para \rightarrow \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 x}{1+x^2} dx$ $u = 1 + x^2 \qquad du = 2xdx$ $Sustituyendo:$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u} du = \frac{1}{2}\int 1\, du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du$ $\displaystyle = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}Ln\|u\| \rightarrow \frac{1}{2}(1+x^2) - \frac{1}{2}Ln\|1+x^2\| + C$ $Solución:$ $\displaystyle\int x^2 \tan^{-1} x\, dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x + \frac{1}{6}Ln\|1+x^2\| - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6} + C$

2. $\int \cos(\ln x)\, dx$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se utiliza la técnica de integración por partes para plantear la solución de la integral.</td><td>

$$u = \cos(\ln x) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{-\sin(\ln x)}{x}dx \qquad v = x$$

$$Sustituyendo:$$

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx$$

$$Para \rightarrow \int \sin(\ln x)\, dx$$

$$u = \sin(\ln x) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \qquad v = x$$

$$Sustituyendo:$$

$$\int \sin(\ln x)\, dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>La solución de la integral debe plantearse en forma algebraica, donde se despeja el término $\int \cos(\ln x)dx$ de la expresión.</td><td>

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

$$Solución:$$

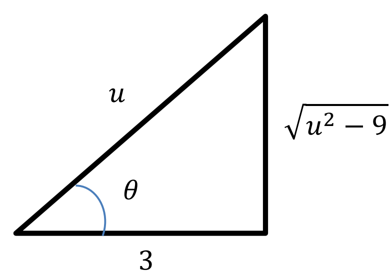
$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + \frac{1}{2}x\sin(\ln x) + C$$

</td></tr>
</table>

3. $\int \sqrt{\cos\ z}\ \left(sen\ z\right)^3\ dz$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para la integral trigonométrica, se realizan los arreglos y sustituciones necesarias para plantear la solución de la misma.	$\int \sqrt{\cos z}\,(\sin z)^3 dz = \int (\cos z)^{\frac{1}{2}} \sin^2 z \sin z\, dz$ $Aplicando \ \rightarrow \ \sin^2 z = 1 - \cos^2 z$ $= \int (\cos z)^{\frac{1}{2}} (1 - \cos^2 z) \sin z\, dz$ $= \int (\cos z)^{\frac{1}{2}} \sin z\, dz - \int (\cos z)^{\frac{1}{2}} \cos^2 z \sin z\, dz$ $= \int (\cos z)^{\frac{1}{2}} \sin z\, dz - \int (\cos z)^{\frac{5}{2}} \sin z\, dz$ $Aplicando \ \rightarrow \ u = \cos z \quad du = -\sin z\, dz$ $-\int u^{\frac{1}{2}}\, du + \int u^{\frac{5}{2}}\, du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}$ $Solución$: $\int \sqrt{\cos z}\,(\sin z)^3 dz = \frac{2}{7}(\cos z)^{7/2} - \frac{2}{3}(\cos z)^{\frac{3}{2}} + C$

4. $$\int \frac{(x+3)^3}{\sqrt{6x+x^2}}\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se realizan los arreglos y sustituciones necesarias para poder aplicar una sustitución trigonométrica en la integral planteada.	$\textit{Completando el cuadrado} \rightarrow 6x + x^2$ $6x + x^2 = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x+3)^2 - 9$ $\textit{Para} \rightarrow u = x + 3 \quad du = dx$ $\int \frac{u^3}{\sqrt{u^2-9}}du$
2.	Se plantea el triángulo para realizar las sustituciones en la integral.	 $\sec\theta = \frac{u}{3}$ $u = 3\sec\theta$ $du = 3\sec\theta\tan\theta$ $\tan\theta = \frac{\sqrt{u^2-9}}{3}$ $\sqrt{u^2-9} = 3\tan\theta$ $\textit{Sustituyendo}:$ $27\int \frac{\sec^3\theta\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}d\theta = 27\int \sec^4\theta\, d\theta$ $= 27\int \sec^2\theta\sec^2\theta\, d\theta$ $\textit{Aplicando} \rightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ $= 27\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$

		$$= 27\int \sec^2\theta\, d\theta + 27\int \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$$ $$Para \rightarrow \int \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$$ $$v = \tan\theta \quad dv = \sec^2\theta\, d\theta$$ $$\int v^2 dv = \frac{v^3}{3} + C$$ $$Sustituyendo\ e\ Integrando:$$ $$27\int \sec^2\theta\, d\theta + 27\int \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta = 27\tan\theta + 9\tan^3\theta + C$$ $$Regresando\ a\ las\ sustituciones:$$ $$\theta = \sec^{-1}(u/3) \quad u = x + 3$$ $$\int \frac{(x+3)^3}{\sqrt{6x+x^2}}dx = 27\tan(\sec^{-1}(u/3)) + 9\tan^3(\sec^{-1}(u/3)) + C$$ $$Solución:$$ $$\int \frac{(x+3)^3}{\sqrt{6x+x^2}}dx = 27\tan\left(\sec^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right)\right) + 9\tan^3\left(\sec^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right)\right) + C$$