UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-1-V-1-00-2018

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
SEMESTRE:	**Primer Semestre**
JORNADA:	**Vespertina**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Febrero de 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Adolfo Duarte Chamalé**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Inga. Silvia Hurtarte**
COORDINADOR:	**Inga. Vera Marroquín**

TEMA 1: (15 Puntos)

Usando la matriz inversa, calcule la solución al siguiente problema. O muestre que la información dada es incorrecta o insuficiente. Hay tres cadenas que pesan: 450, 610 y 950 onzas, cada una de ellas formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños, también tienen 20, 30 y 40 eslabones de tamaño mediano, así como 30, 40 y 70 eslabones de tamaño grande, respectivamente. Encuentre cuánto pesa cada tamaño de eslabón: pequeño, mediano y grande.

TEMA 2: (15 Puntos) Use propiedades de determinante combinado con Cofactores y encuentre el valor del determinante de la siguiente matriz.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

Tema 3: (15 puntos)

Determine los valores de K, para que el sistema dado tenga: a) Solución Única, b) Infinitas soluciones y c) No tenga solución:

$$\begin{aligned} kx \quad + \qquad 3y \quad &= -3 \\ x \quad +(k-2)y \quad &= 3 \end{aligned}$$

Tema 4: (10 puntos)

Dada la matriz A, encuentre lo solicitado: a) La Adjunta de A, b) La matriz inversa y c) Pruebe la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tema 5: (45 puntos) Resuelva las siguientes integrales.

$\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} dx$	$\int t^3 tan^{-1} t \, dt$
$\int tan^5 x \sec x \, dx$	$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1

Usando la matriz inversa, calcule la solución al siguiente problema. O muestre que la información dada es incorrecta o insuficiente. Hay tres cadenas que pesan: 450, 610 y 950 onzas, cada una de ellas formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños, también tienen 20, 30 y 40 eslabones de tamaño mediano, así como 30, 40 y 70 eslabones de tamaño grande, respectivamente. Encuentre cuánto pesa cada tamaño de eslabón: pequeño, mediano y grande.

No.	Explicación	Operatoria
1	Planteamos el sistema de ecuaciones que describe el problema.	$10x+20y+30z=450$ $10x+30y+40z=610$ $10x+40y+70z=950$
2	Utilizamos la notación de matrices.	$A\cdot x=b$ $\begin{pmatrix}10&20&30\\10&30&40\\10&40&70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}450\\610\\950\end{pmatrix}$
3	Tenemos entonces la matriz que vamos a invertir.	$A=\begin{pmatrix}10&20&30\\10&30&40\\10&40&70\end{pmatrix}$
4	Hallamos el determinante, utilizando la columna 1, de la matriz A, por el método de cofactores.	$Det(A)=(-1)^{1+1}A_{11}\|M_{11}\|+(-1)^{2+1}A_{21}\|M_{21}\| + (-1)^{3+1}A_{31}\|M_{31}\|$ $Det(A)=(-1)^2(10)\begin{vmatrix}30&40\\40&70\end{vmatrix}+(-1)^3(10)\begin{vmatrix}20&30\\40&70\end{vmatrix} + (-1)^4(10)\begin{vmatrix}20&30\\30&40\end{vmatrix}$ $Det(A)=10[(30)(70)-(40)(40)] - 10[(20)(70)-(30)(40)] + 10[(20)(40)-(30)(30)]$ $Det(A)=2000$
5	Hallamos los cofactores, se hallarán columna por columna. Utilizando la ecuación correspondiente.	$C_{11}=(-1)^{1+1}\|M_{11}\|=(-1)^2\begin{vmatrix}30&40\\40&70\end{vmatrix}=500$ $C_{21}=(-1)^{2+1}\|M_{21}\|=(-1)^3\begin{vmatrix}20&30\\40&70\end{vmatrix}=-200$ $C_{31}=(-1)^{3+1}\|M_{31}\|=(-1)^4\begin{vmatrix}20&30\\30&40\end{vmatrix}=-100$

		$C_{12} = (-1)^{1+2}\lvert M_{12}\rvert = (-1)^3 \begin{vmatrix} 10 & 40 \\ 10 & 70 \end{vmatrix} = -300$ $C_{22} = (-1)^{2+2}\lvert M_{22}\rvert = (-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 10 & 70 \end{vmatrix} = 400$ $C_{32} = (-1)^{3+2}\lvert M_{32}\rvert = (-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 10 & 40 \end{vmatrix} = -100$ $C_{13} = (-1)^{1+3}\lvert M_{13}\rvert = (-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 10 & 40 \end{vmatrix} = 100$ $C_{23} = (-1)^{2+3}\lvert M_{23}\rvert = (-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 40 \end{vmatrix} = -200$ $C_{33} = (-1)^{3+3}\lvert M_{33}\rvert = (-1)^6 \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 30 \end{vmatrix} = 100$
6	Encontramos entonces la matriz de cofactores.	$C = \begin{pmatrix} 500 & -300 & -100 \\ -200 & 400 & -200 \\ -100 & -100 & 100 \end{pmatrix}$
7	Hallamos la transpuesta de la matriz de cofactores, también conocida como la matriz adjunta de A.	$Adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} 500 & -200 & 100 \\ -300 & 400 & -100 \\ -100 & -200 & 100 \end{pmatrix}$
8	Con los datos hallados anteriormente, podemos hallar la inversa.	$A^{-1} = \dfrac{1}{Det(A)} Adj(A)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{2000} \begin{pmatrix} 500 & -200 & -100 \\ -300 & 400 & -100 \\ 100 & -200 & 100 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/10 & -1/20 \\ -3/20 & 1/5 & -1/20 \\ 1/20 & -1/10 & 1/20 \end{pmatrix}$

9	Hallamos los valores de las variables que resuelven el sistema de ecuaciones, utilizando la matriz inversa.	$x = A^{-1} \cdot b$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/10 & -1/20 \\ -3/20 & 1/5 & -1/20 \\ 1/20 & -1/10 & 1/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 610 \\ 950 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450\left(\frac{1}{4}\right) - 610\left(\frac{1}{10}\right) - 950\left(\frac{1}{20}\right) \\ -450\left(\frac{3}{20}\right) + 610\left(\frac{1}{5}\right) - 950\left(\frac{1}{20}\right) \\ 450\left(\frac{1}{20}\right) - 610\left(\frac{1}{10}\right) + 950\left(\frac{1}{20}\right) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

R// $x = 4\,,\ y = 7\,,\ z = 9$

Tema 2

Hallaremos el determinante de la siguiente matriz.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Hallaremos el determinante con el método de cofactores. Utilizaremos la columna 1 para esto, pues al hacerlo solo será necesario hallar dos matrices menores, pues los cofactores C_{21} y C_{41} no influyen en el cálculo, ya que sus términos de entrada son cero.	$Det(A) = (-1)^{1+1}A_{11}\|M_{11}\| + (-1)^{3+1}A_{31}\|M_{31}\|$ $Det(A) = (-1)^2(1)\begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^4(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$
2	Hallamos el determinante de la matriz menor M_{11} , utilizando la segunda columna de la misma (por conveniencia).	$\|M_{11}\| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$ $\|M_{11}\| = (-1)^{1+2}\|M'_{12}\| + (-1)^{2+2}\|M'_{22}\| + (-1)^{3+2}\|M'_{32}\|$ $\|M_{11}\| = (-1)^3(5)[(4)(7)-(3)(5)] + (-1)^5(-6)[(-3)(3)-(6)(4)]$ $\|M_{11}\| = -263$
3	Hallamos el determinante de la matriz menor M_{31}, utilizando la columna 1 de la misma.	$\|M_{31}\| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$ $\|M_{31}\| = (-1)^{1+1}\|M'_{11}\| + (-1)^{2+1}\|M'_{21}\| + (-1)^{3+1}\|M'_{31}\|$ $\|M_{31}\| = (-1)^2(-1)[(5)(7)-(6)(-6)] + (-1)^3(-3)[(2)(7)-(4)(-6)] + (-1)^4(5)[(2)(6)-(4)(5)]$ $\|M_{31}\| = 3$

4	Ahora procedemos a calcular el determinante de la matriz A.	$Det(A) = (-1)^2(1)(-263) + (-1)^4(1)(3)$ = -260

R// $Det(A) = -260$

Tema 3

Determine los valores de k, para que el sistema dado tenga:

$$\begin{aligned} kx &+ 3y &= -3 \\ x &+(k-2)y &= 3 \end{aligned}$$

a) Solución Única

No.	Explicación	Operatoria
1	En primer lugar, es necesario hallar el determinante de nuestro sistema, pues si tal determinante es distinto de cero, sabemos que tenemos solución única. En caso de que nuestro determinante sea igual a cero, sabemos que puede tener infinitas soluciones o no tener solución.	$A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 1 & k-2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix} = (k)\,(k-2) - (3)(1)$ $\det(A) = k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1)$
2	Igualamos el resultado anterior a cero, y obtenemos los valores para los que el determinante es cero, por lo tanto, concluimos que el sistema tendrá solución única, cuando el valor de k sea distinto a los valores hallados anteriormente.	$k \neq 3$ $k \neq -1$

R// El sistema tendrá solución única si:

$$k \neq 3\,,\, k \neq -1$$

Procedemos a probar el valor k = -1, para saber que tipo de sistema obtenemos.

No.	Explicación	Operatoria
1	Haciendo el valor de k = -1, el sistema adquiere la siguiente forma.	$\left(\begin{array}{cc\|c} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{array}\right)$
2	El anterior resultado nos indica que las soluciones para nuestro sistema son infinitas. Pues el sistema se reduce a una sola ecuación.	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Procedemos a probar el valor de k = 3, para saber que tipo de sistema obtenemos.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1	Haciendo el valor de k = 3, el sistema adquiere la siguiente forma.	$\left(\begin{array}{cc\|c} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$
2	El resultado nos indica que no existen soluciones para el sistema de ecuaciones, pues existe un valor cero, igualado a un valor finito.	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

b) Valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones:

R// $k = -1$

c) Valor de k para el cual el sistema no tiene solución:

R// $k = 3$

*Nota: Es importante de probar el valor de k, que hace el determinante igual a cero, pues tal situación puede indicar uno de dos casos, que se tienen infinitas soluciones o que no se tiene solución, lo cual se puede probar sustituyendo el valor de k en el sistema.

Tema 4

Dada la matriz A, encuentre lo solicitado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) La adjunta de A

No.	Explicación	Operatoria
1	Por teorema, hallamos la adjunta de la matriz A.	$Adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
2	Sustituyendo los valores obtenemos.	$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

R// $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) La matriz inversa

No.	Explicación	Operatoria
1	En primer lugar, procedemos a calcular el determinante de A.	$\det(A) = [(1)(2) - (3)(-2)] = 8$
2	Ya que conocemos el la matriz adjunta, y el determinante de la matriz, su inversa se puede calcular de la siguiente forma:	$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} Adj(A)$ $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
3	Simplificando obtenemos.	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

R// $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

c) Pruebe la matriz inversa

No.	Explicación	Operatoria
1	Por definición sabemos que, si existe la matriz inversa de una matriz, entonces el producto de ambas, debe ser igual a la matriz identidad. Es decir si una matriz es la inversa de otra, su multiplicación debe dar como resultado la matriz identidad.	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2	Procedemos a multiplicar ambas matrices.	$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$
3	Simplificamos el resultado.	$AA^{-1} = \begin{pmatrix} (1)\left(\frac{1}{4}\right) + (3)\left(\frac{1}{4}\right) & (1)\left(-\frac{3}{8}\right) + (3)\left(\frac{1}{8}\right) \\ (2)\left(\frac{1}{4}\right) + (-2)\left(\frac{1}{4}\right) & (-2)\left(-\frac{3}{8}\right) + (2)\left(\frac{1}{8}\right) \end{pmatrix}$
4	Efectivamente se obtuvo la matriz identidad como resultado de la multiplicación, podemos concluir que la matriz inversa es correcta.	$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tema 5

$$\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Ya que la integral no se puede hacer de forma directa, utilizamos la separación por fracciones parciales para poder resolverla.	$\frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$
2	Encontramos los valores de las constantes.	$x^2+1 = A(x-2)^2 + B(x-3)(x-2) + C(x-3)$ $x^2+1 = A(x^2-4x+4) + B(x^2-5x+6) + C(x-3)$ $x^2+1 = (A+B)x^2 + (-4A-5B+C)x + (4A+6B-3C)$ $1 = (A+B)$ $0 = (-4A-5B+C)$ $1 = (4A+6B-3C)$ $A = 10$ $B = -9$ $C = -5$
3	Sustituimos las fracciones.	$\int \left(\frac{-9}{x-2} - \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{10}{x-3}\right)dx$
4	Resolvemos la integral	$-\int \frac{9}{x-2}\,dx - \int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{10}{x-3}\,dx$ $-9\ln\lvert x-2\rvert + \frac{5}{x-2} + 10\ln\lvert x-3\rvert + C$

R// $\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx = -9\ln\lvert x-2\rvert + \frac{5}{x-2} + 10\ln\lvert x-3\rvert + C$

$$\int t^3 tan^{-1} t\, dt$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Para resolver esta integral utilizamos el método de integración por partes. Donde u siempre son las funciones trigonométricas inversas, en este caso tenemos tangente inversa.	$u = tan^{-1}(t)$ $du = \frac{1}{t^2+1}dt$ $dv = t^3 dt$ $v = \frac{t^4}{4}$
2	Aplicamos el método, de integración por partes.	$\int u\, dv = uv - \int v\, du$ $\int t^3 tan^{-1} t\ dt = \left(\frac{t^4}{4}\right) tan^{-1}(t) - \frac{1}{4}\int \frac{t^4}{t^2+1} dt$
3	Simplificamos el término dentro de la integral, por medio de división larga.	$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$
4	Resolvemos la integral.	$\int t^3 tan^{-1} t\ dt = \left(\frac{t^4}{4}\right) tan^{-1}(t) - \frac{1}{4}\int \left(t^2 + \frac{1}{t^2+1} - 1\right) dt$ $= \left(\frac{t^4}{4}\right) tan^{-1}(t) - \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3} + tan^{-1}(t) - t\right]$ $= \frac{t^4}{4} tan^{-1}(t) - \frac{t^3}{12} - \frac{tan^{-1}(t)}{4} + \frac{t}{4} + C$

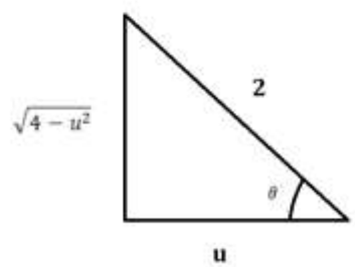
R// $\int t^3 tan^{-1} t\, dt = \frac{t^4}{4} tan^{-1}(t) - \frac{t^3}{12} - \frac{1}{4} tan^{-1}(t) + \frac{t}{4} + C$

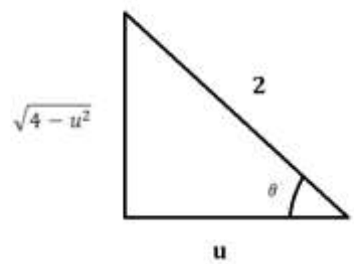
$$\int tan^5 x \, sec\, x \, dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Expandimos la expresión para obtener una forma más conveniente, ya que tenemos una potencia impar de tangente, procedemos a expandir la tangente.	$\int \tan^5(x)\sec(x)\,dx = \int \tan(x)\,[tan^2(x)]^2 \sec(x)\,dx$ $= \int [sec^2(x) - 1]^2 \tan(x)\sec(x)\,dx$
2	Aplicamos la identidad que relaciona la tangente y la secante. Y obtenemos una expresión más conveniente para integrar.	$\tan^2(x) = sec^2(x) - 1$ $\int \tan^5(x)\sec(x)\,dx$ $= \int [sec^2(x) - 1]^2 \tan(x)\sec(x)\,dx$
3	Aplicamos una sustitución.	$u = sec(x)$ $du = \sec(x)\tan(x)dx$ $\int (u^2 - 1)^2 du$
4	Resolvemos la integral, para la variable u.	$\int (u^4 - 2u^2 + 1)du$ $= \int u^4\,du - \int 2u^2\,du + \int du$ $= \frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + u + c$
5	Volvemos a la variable original.	$u = sec(x)$ $= \frac{1}{5}sec^5(x) - \frac{2}{3}sec^3(x) + sec(x) + C$

R// $\int \tan^5(x)\sec(x)\,dx = \frac{1}{5}sec^5(x) - \frac{2}{3}sec^3(x) + sec(x) + C$

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Transformamos la función a una forma más conveniente.	$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$
2	Hacemos una sustitución	$u=(x-1)$ $du=dx$ $\int \frac{u^2}{\sqrt{4-u^2}}du$
3	Ahora utilizamos la técnica de sustitución trigonométrica.	 $2Sen\theta = \sqrt{4-u^2}$ $u=2Cos\theta$ $du=-2Cos\theta$
4	Obtenemos la siguiente integral.	$\int \frac{4Cos^2\theta}{2Sen\theta}(-2Sen\theta)d\theta$ $-\int 4Cos^2\theta d\theta$
5	Aplicamos la identidad del medio ángulo a la expresión dentro de la integral, y procedemos a resolver dicha integral.	$-4\int Cos^2\theta d\theta$ $-4\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Cos(2\theta)\right)d\theta$ $-\int\big(2+2Cos(2\theta)\big)d\theta$ $-\int 2d\theta-\int 2Cos(2\theta)d\theta$

		$-\theta - Sen(2\theta) + C$ $-\theta - 2Sen(\theta)Cos(\theta) + C$
6	Volvemos a la variable u.	 $Sen\theta = \frac{\sqrt{4-u^2}}{2}$ $Cos\theta = \frac{u}{2}$ $\theta = Cos^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$ $-Cos^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{4-u^2}}{2}\right)\left(\frac{u}{2}\right) + C$
7	Volvemos a la variable original.	$-Cos^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{2}\right)(x-1) + C$ $-Cos^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2} + C$

R// $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -Cos^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2} + C$