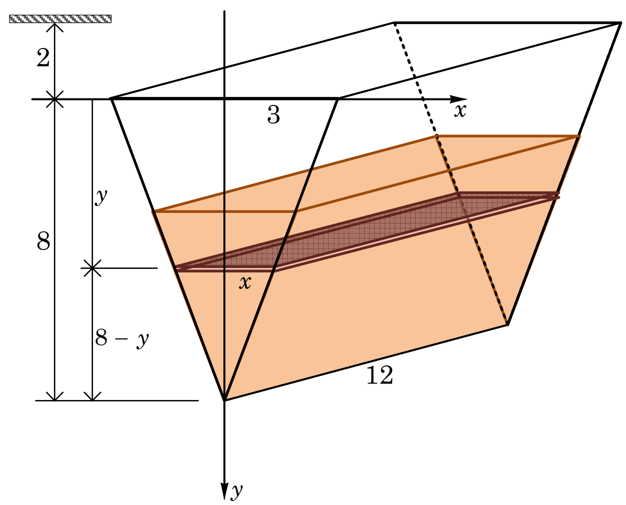
PROBLEMA RESUELTO 5

Un deposito para almacenar aceite tiene sección transversal en forma de triángulo isósceles de 6 pies en el lado superior, 8 pies de altura y 12 pies de longitud. El depósito contiene aceite que pesa 50 libras por pie cúbico hasta una profundidad de 5 pies. Calcule el trabajo realizado al bombear todo el aceite a una altura de 2 pies por encima del depósito.

Solución

La siguiente figura muestra el depósito que contiene aceite hasta una profundidad de 5 pies



El trabajo al llenar o vaciar un depósito está dado por

$$W = \int_a^b dw = \int_a^b \rho D\, dv$$

ρ es peso por unidad de volumen para el aceite, para este problema se tomará

$$\rho = 50 \frac{\text{lib}}{\text{pie}^3}$$

D es la distancia que tiene que recorrer el diferencial desde el punto de bombeo hasta su posición final expresada en términos de la variable de integración y. Como el aceite se bombeará 2 pies por encima del depósito se tiene que

$$D = y + 2$$

El diferencial de volumen se obtiene de la forma del depósito, en este problema el diferencial de volumen es un rectángulo de ancho $2x$, un largo de 12 y espesor dy,

$$\begin{aligned} dv &= (2x)(12)dy \\ &= 24x\,dy \end{aligned}$$

Para expresar x en términos de la variable de integración y se puede utilizar la ecuación de una recta o bien semejanza de triángulos. Por medio de semejanza se tiene

$$\frac{x}{3} = \frac{8-y}{8}$$

$$x = \frac{3}{8}(8-y)$$

Entonces el diferencial de volumen es

$$\begin{aligned} dv &= 24\left(\frac{3}{8}(8-y)\right)dy \\ &= 9(8-y)dy \end{aligned}$$

Los límites de integración se obtienen del volumen de agua que se bombeará del depósito. Como el depósito contiene aceite a una profundidad de 5 pies, se tiene que en la superficie del aceite $y = 3$, mientras que en la parte inferior del depósito $y = 8$

El trabajo es entonces

$$W = \int_3^8 \rho D dv$$

$$\begin{aligned} W &= \int_3^8 50(y+2)(9)(8-y)dy \\ &= 450\int_3^8 (y+2)(8-y)dy \\ &= 450\int_3^8 (6y - y^2 + 16)dy \\ &= 450\left(3y^2 - \frac{y^3}{3} + 16y\right)\Bigg|_3^8 \\ &= 450\left(3(8)^2 - \frac{(8)^3}{3} + 16(8)\right) - 450\left(3(3)^2 - \frac{(3)^3}{3} + 16(3)\right) \\ &= 450\left(\frac{448}{3} - 66\right) \\ &= 37500 \end{aligned}$$

Entonces el trabajo es 37,500 libras-pie