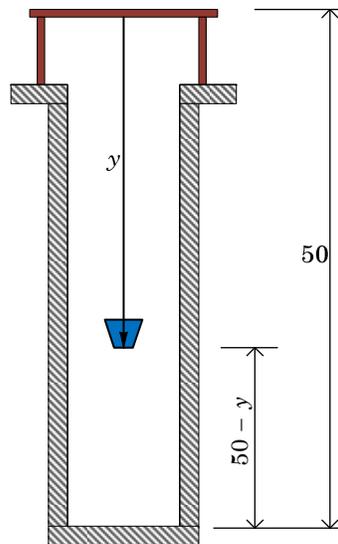


PROBLEMA RESUELTO 3

Una cubeta que pesa 20 libras contiene agua que pesa 70 libras. La cubeta es subida desde el fondo de un pozo de 50 pies de profundidad por medio de una cadena que pesa 2 libras por pie. La cubeta tiene un agujero de tal forma que mientras es subida desde el fondo del pozo hacia arriba se escapan 20 libras de agua. Determine el trabajo realizado al subir la cubeta.

Solución

En este problema la fuerza f depende únicamente de la gravedad. A medida que la cadena va subiendo hacia arriba, el valor de la fuerza cambia. Por un lado, como la cubeta tiene una fuga, su peso disminuye a linealmente a medida que sube, por otro lado, el peso de la cadena también va disminuyendo ya que se supone el peso de la cadena es proporcional a la parte de la cadena que aún no se ha subido. La siguiente figura muestra la cubeta a una distancia y de la parte superior del pozo



$$F = \text{Peso cubeta} + \text{peso agua} + \text{peso cadena}$$

El peso de la cubeta es constante e igual a 20 libras.

El peso de la cadena es de 2 libras por cada pie, si faltan y pies por subir entonces el peso es

$$\text{Peso cadena} = 2y$$

El peso del agua varía linealmente y se puede obtener por medio de la ecuación de una recta

Si $y = 50$ el peso es 70 libras, si $y = 0$ el peso es 50 libras ya que se han perdido 20 libras

$$m = \frac{P_2 - P_1}{y_2 - y_1} = \frac{70 - 50}{50 - 0} = \frac{20}{50} = 0.4$$

La ecuación lineal que relaciona el peso del agua con la distancia y es

$$P - P_1 = m(y - y_1)$$

$$P - 50 = 0.4(y - 0)$$

$$P = 0.4y + 50$$

Entonces la fuerza que se hace para subir la cubeta en términos de la profundidad es

$$\begin{aligned} F(y) &= 20 + (0.4y + 50) + 2y \\ &= 70 + 2.4y \end{aligned}$$

El trabajo realizado al subir la cubeta desde el fondo del pozo es

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)dx \\ &= \int_0^{50} (70 + 2.4y) dy \\ &= (70y - 1.2y^2) \Big|_0^{50} \\ &= (70)(50) - 1.2(50)^2 - 0 \\ &= 500 \end{aligned}$$

El trabajo realizado es de 500 libras-pie.
