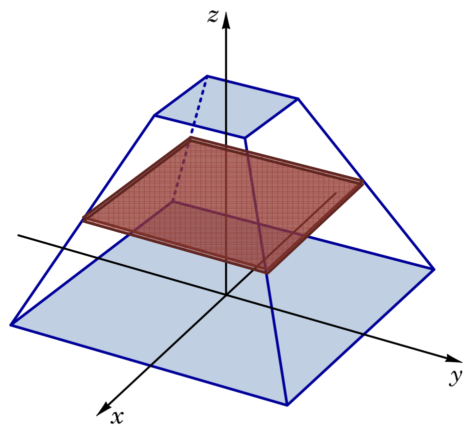
PROBLEMA RESUELTO 3

Una pirámide regular truncada tiene base inferior cuadrada de 6 pies cada lado y una base superior de 2 pies cada lado. La pirámide tiene una altura de 4 pies. Utilice el método de secciones planas paralelas para encontrar el volumen de la pirámide.

Solución

La figura muestra un dibujo de la pirámide truncada, con una sección plana típica paralela al plano xy, que tiene forma de cuadrado con un espesor dz

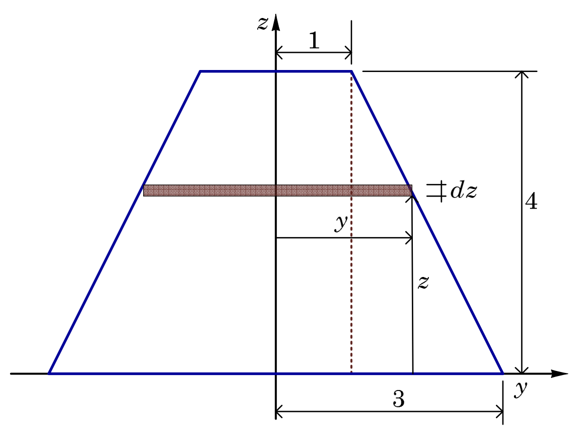


Como la variable de integración es z, el volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b dV$$

$$= \int_0^4 A(z)dz$$

Para encontrar una expresión para el área en términos de la variable de integración se recomienda hacer una gráfica en dos dimensiones en donde se puedan obtener las relaciones. Al hacer un dibujo mostrando el plano yz se tiene



El área de la sección plana paralela está dada por

$$A = (l)^2$$

$$= (2y)^2$$

Para encontrar una relación entre las variables y y z se puede utilizar la ecuación de la recta o bien semejanza de triángulos. Utilizando semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{4}{2} = \frac{z}{3-y}$$

$$4(3-y) = 2z$$

$$12 - 2z = 4y$$

$$y = 3 - \frac{z}{2}$$

Entonces el área de la sección plana paralela expresada en términos de z es

$$A = (l)^2 = (2y)^2 = 4y^2$$

$$A(z) = 4\left(3 - \frac{z}{2}\right)^2$$

El volumen de la pirámide truncada es

$$V = \int_a^b A(z)dz$$

$$= \int_0^4 4\left(3 - \frac{z}{2}\right)^2 dz$$

Calculando la integral

$$V = 4\int_0^4 \left(9 - 3z + \frac{z^2}{4}\right)dz$$

$$= 4\left(9z - \frac{3z^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= 36(4) - 6(4)^2 + \frac{(4)^3}{3} - 0$$

$$= 144 - 96 + \frac{64}{3}$$

$$= \frac{208}{3}$$