

PROBLEMA RESUELTO 2

Se requiere hacer un trabajo de 100 J para estira un resorte de 20 centímetros a 24 centímetros, mientras que se hace un trabajo de 200 J para estirar el resorte de 24 cm a 28 cm. Determine la longitud natural del resorte.

Solución

Según la ley de Hooke la fuerza requerida para estirar o comprimir un resorte una longitud x a partir de su longitud natural está dada por

$$f(x) = kx$$

Donde x es el estiramiento del resorte medido a partir de su longitud natural.

Cuando el resorte se estira de 20 a 24 cm se tiene



De la figura anterior se obtiene que los estiramientos son

$$x_1 = 20 - L_0 \quad \text{y} \quad x_2 = 24 - L_0$$

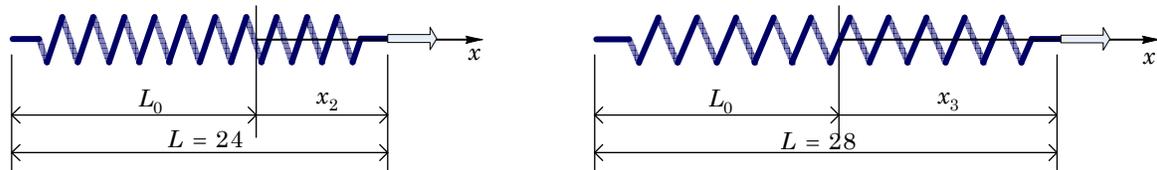
El trabajo realizado está dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} kx dx \\ &= \int_{20-L_0}^{24-L_0} kx dx \\ &= \frac{kx^2}{2} \Big|_{20-L_0}^{24-L_0} \\ &= \frac{k(24 - L_0)^2}{2} - \frac{k(20 - L_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Como el trabajo realizado es de 100 J

$$\begin{aligned} \frac{k(24 - L_0)^2}{2} - \frac{k(20 - L_0)^2}{2} &= 100 \\ k(24 - L_0)^2 - k(20 - L_0)^2 &= 200 \\ k(576 - 48L_0 + L_0^2 - 400 + 40L_0 - L_0^2) &= 200 \\ k(176 - 8L_0) &= 200 \end{aligned}$$

Cuando el resorte se estira de 24 a 28 cm se tiene



De la figura anterior se obtiene que los estiramientos son

$$x_2 = 24 - L_0 \quad \text{y} \quad x_3 = 28 - L_0$$

El trabajo realizado está dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)dx = \int_{x_2}^{x_3} kx dx \\ &= \int_{24-L_0}^{28-L_0} kx dx \\ &= \frac{kx^2}{2} \Big|_{24-L_0}^{28-L_0} \\ &= \frac{k(28 - L_0)^2}{2} - \frac{k(24 - L_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Como el trabajo realizado es de 200 J

$$\begin{aligned} \frac{k(28 - L_0)^2}{2} - \frac{k(24 - L_0)^2}{2} &= 200 \\ k(28 - L_0)^2 - k(24 - L_0)^2 &= 400 \\ k(784 - 56L_0 + L_0^2 - 576 + 48L_0 - L_0^2) &= 400 \\ k(208 - 8L_0) &= 400 \end{aligned}$$

Despejando k e igualando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{200}{176 - 8L_0} &= \frac{400}{208 - 8L_0} \\ 208 - 8L_0 &= 2(176 - 8L_0) \\ 16L_0 - 8L_0 &= 352 - 208 \\ 8L_0 &= 144 \\ L_0 &= \frac{144}{8} \\ L_0 &= 18 \end{aligned}$$

La longitud natural del resorte es de 18 centímetros.
