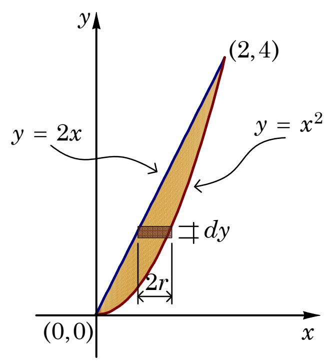
PROBLEMA RESUELTO 2

La base de un sólido es la región del plano limitada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$. Determine el volumen del sólido si las secciones planas paralelas perpendiculares al eje y son semicírculos que tienen su diámetro en la base del sólido.

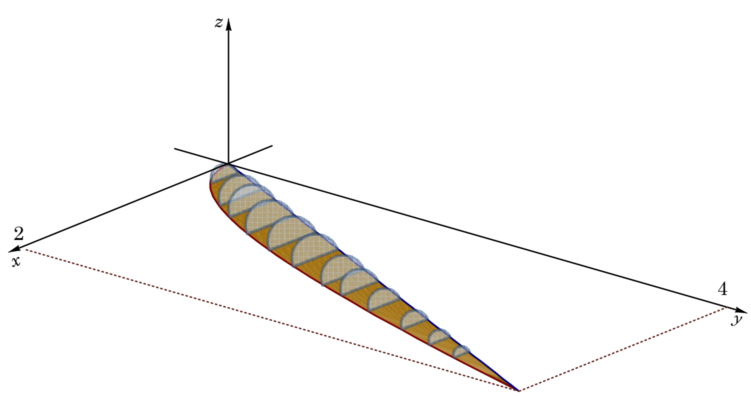
Solución

Primero se dibuja la base del sólido, la cual está limitada en la parte superior por la recta $y = 2x$ y en la parte inferior por la parábola $y = x^2$. Estas curvas se intersecan en los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$. Como las secciones planas paralelas son perpendiculares al eje y el eje de integración será el eje y.



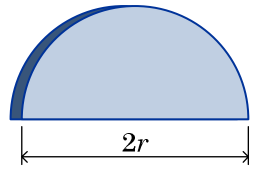
En la figura también se muestra la base de una sección plana paralela típica cuyo diámetro en su base es $2r$.

La siguiente figura da una idea aproximada del sólido que se forma al dibujar varias de las secciones planas paralelas con forma de semicírculo sobre la base del sólido. Todas las secciones planas paralelas son perpendiculares al eje y.



El diferencial de volumen tiene forma de un semicírculo cuyo diámetro es $2r$. El área de la sección plana paralela es

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$



Observe que el área del semicírculo se debe expresar en términos de la variable de integración que en este caso es y.

Expresando las funciones en términos de y. Para la recta se tiene que

$$y = 2x$$

$$x_1 = \frac{y}{2}$$

Para la parábola se tiene

$$y = x^2$$

$$x_2 = \sqrt{y}$$

Ahora se expresa el radio en términos de y

$$2r = x_2 - x_1$$

$$2r = \sqrt{y} - \frac{1}{2}y$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{y} - \frac{1}{4}y$$

El área de la sección plana paralela queda ahora expresada en términos de y

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$A(y) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{y} - \frac{1}{4}y\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2\sqrt{y} - y}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{32}\left(2\sqrt{y} - y\right)^2$$

Como la variable de integración es y, los límites de integración son de 0 a 4.

$$V = \int_a^b A(x)dy$$

$$= \int_0^4 \frac{\pi}{32}\left(2\sqrt{y} - y\right)^2 dy$$

Calculando la integral para obtener el volumen

$$V = \frac{\pi}{32}\left(\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{\pi}{32}\left[\left(\frac{4(4)^{3/2}}{3} - \frac{(4)^2}{2}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{32}\left[\left(\frac{32}{3} - \frac{16}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{32}\left[\left(\frac{8}{3}\right)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{12}$$