PROBLEMA RESUELTO 2

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcule: **a.** AB, **b.** BA, **c.** $B^2 - 2B^T$

Solución

a. El producto AB si esta definido pues el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Sea $C = AB$, entonces C tiene el número de filas de A y el número de columnas de B. Es decir que C es una matriz de 2×3.

Los elementos del producto están dados por

$$c_{11} = (-2)(-2) + (5)(0) + (0)(2) = 4$$

$$c_{12} = (-2)(-4) + (5)(3) + (0)(-3) = 23$$

$$c_{13} = (-2)(5) + (5)(-1) + (0)(6) = -15$$

$$c_{21} = (-1)(-2) + (6)(0) + (8)(2) = 18$$

$$c_{22} = (-1)(-4) + (6)(3) + (8)(-3) = -2$$

$$c_{23} = (-1)(5) + (6)(-1) + (8)(6) = 37$$

El producto es entonces

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 23 & -15 \\ 18 & -2 & 37 \end{bmatrix}$$

b. El producto BA no está definido pues el número de columnas de B no es igual al número de filas de A

c. La potencia de una matriz se calcula de la misma forma que el producto, así

$$\begin{aligned} B^2 &= B \times B \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como B es una matriz cuadrada el número de filas es igual al número de columnas se tiene que el producto C está definido y es una matriz de 3×3. Cada elemento del producto está dado por

$$c_{11} = (-2)(-2) + (-4)(0) + (5)(2) = 14$$

$$c_{12} = (-2)(-4) + (-4)(3) + (5)(-3) = -19$$

$$c_{13} = (-2)(5) + (-4)(-1) + (5)(6) = 24$$

$$c_{21} = (0)(-2) + (3)(0) + (-1)(2) = -2$$

$$c_{22} = (0)(-4) + (3)(3) + (-1)(-3) = 12$$

$$c_{23} = (0)(5) + (3)(-1) + (-1)(6) = -9$$

$$c_{31} = (2)(-2) + (-3)(0) + (6)(2) = 8$$

$$c_{32} = (2)(-4) + (-3)(3) + (6)(-3) = -35$$

$$c_{33} = (2)(5) + (-3)(-1) + (6)(6) = 49$$

Entonces

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -19 & 24 \\ -2 & 12 & -9 \\ 8 & -35 & 49 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la operación requerida

$$\begin{aligned} B^2 - 2B^T &= \begin{bmatrix} 14 & -19 & 24 \\ -2 & 12 & -9 \\ 8 & -35 & 49 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -19 & 24 \\ -2 & 12 & -9 \\ 8 & -35 & 49 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -19 & 24 \\ -2 & 12 & -9 \\ 8 & -35 & 49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & -6 & 6 \\ -10 & 2 & -12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -19 & 20 \\ 6 & 6 & -3 \\ -2 & -33 & 37 \end{bmatrix} \end{aligned}$$